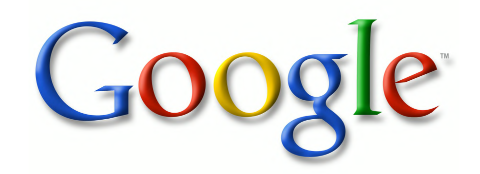
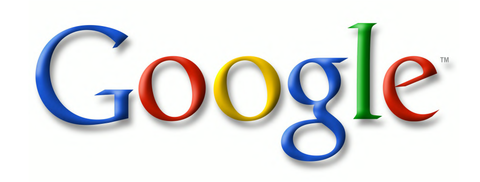
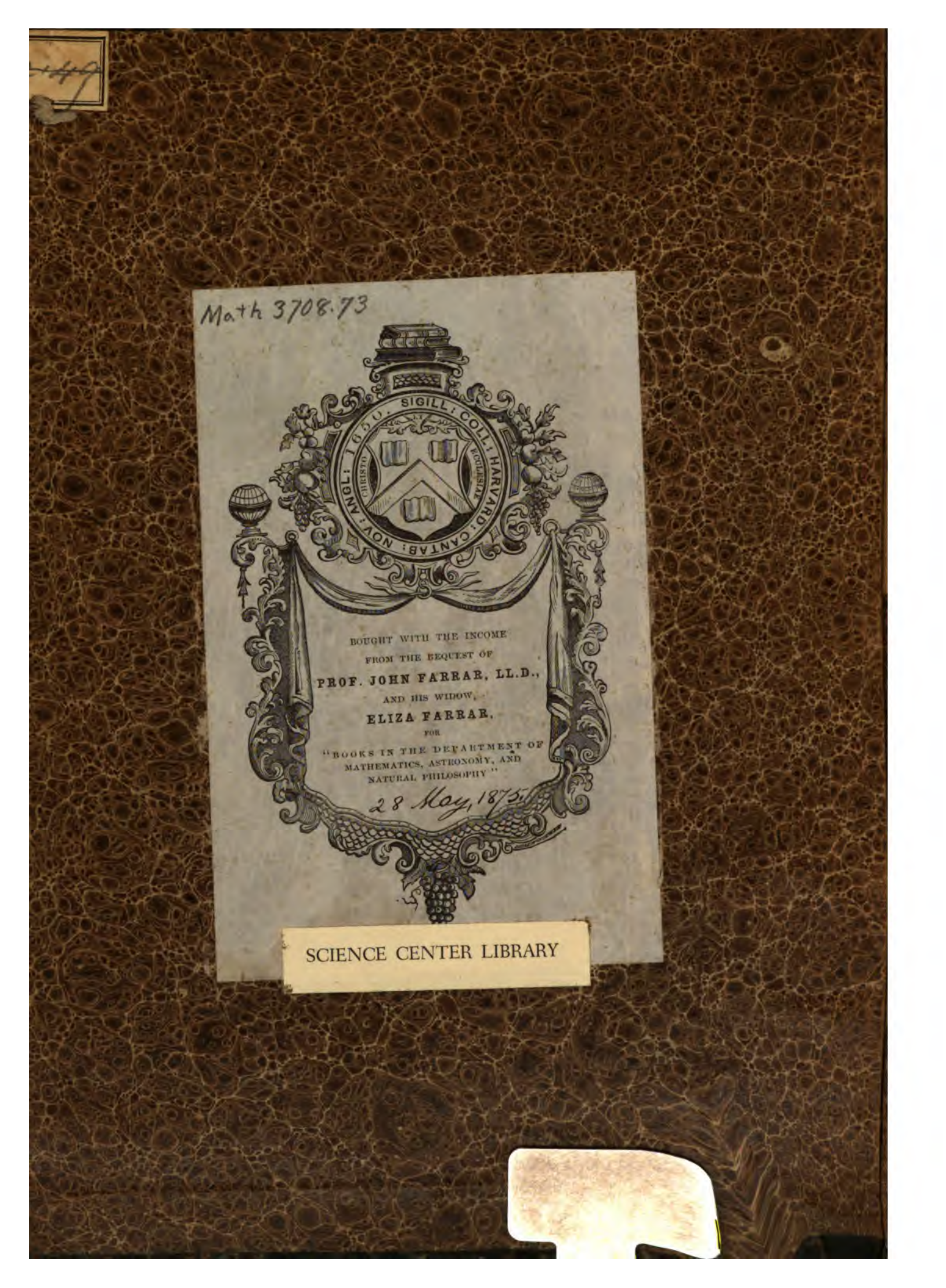






Math 3708.73
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE





THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

Charles (Auguste Albert) C. Jean Claude

MM. BRIOT ET BOUQUET,

PROFESSEURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MAITRES DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME ÉDITION.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1875

PRÉFACE.

La première Partie de cet Ouvrage est consacrée à l'exposition d'une théorie des fonctions, d'après les idées de Cauchy. Le principe fondamental de cette théorie est la considération des fonctions d'une variable imaginaire. Il apparaît pour la première fois dans le Mémoire célèbre de 1825 sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Depuis, par les travaux de Cauchy et des géomètres qui ont suivi ses traces, il a reçu des développements tels, et a conduit à la découverte d'un si grand nombre de vérités nouvelles, que son importance est aujourd'hui universellement reconnue. Cependant on constate avec regret que, dans quelques ouvrages consacrés à cet ordre de recherches, on ne rend pas à Cauchy la justice qui lui est due.

Dans la théorie de Cauchy, la marche de la variable imaginaire est figurée par le mouvement d'un point sur un plan. Pour représenter les fonctions qui acquièrent plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable, Riemann regardait le plan comme formé de plusieurs feuillets superposés et réunis par des soudures, de manière que la variable puisse passer d'un feuillet à un autre en traversant une ligne de raccordement. La conception des sur-

faces à feuillets multiples présente quelques difficultés; malgré les beaux résultats auxquels Riemann est arrivé par cette méthode, elle ne nous a paru présenter aucun avantage pour l'objet que nous avions en vue. L'idée de Cauchy se prête très-bien à la représentation des fonctions multiples; il suffit de joindre à la valeur de la variable la valeur correspondante de la fonction, et, quand la variable a décrit une courbe fermée et que la valeur de la fonction a changé, d'indiquer ce changement par un indice.

Pour étudier la variation de la fonction, quand la variable z est très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$, et l'on donne à z' des valeurs très-petites; la nouvelle variable est figurée, comme la première, par le mouvement d'un point sur un plan. Si l'on conçoit que les deux plans relatifs aux variables z et z' soient tangents à une sphère aux extrémités d'un diamètre, on remarque que les droites qui joignent les deux points correspondant aux extrémités du diamètre percent la surface de la sphère en un même point; on transporte ainsi sur la sphère les deux figures planes. Cette considération de la sphère, due à M. Neumann, est commode dans l'étude des fonctions algébriques, elle simplifie les énoncés : nous l'avons adoptée dans cette seconde édition. Toutefois, nous ferons remarquer que le raisonnement reste le même; après avoir étudié la marche de la fonction pour les valeurs finies de z, sur le premier plan, il est nécessaire d'opérer la transformation $z = \frac{1}{z'}$, et d'étudier comment se comporte la fonction dans le voisinage du point $z' = 0$, sur le second plan; on réunit ensuite les deux parties de la démonstration à l'aide de la sphère. Ceci nous donne

l'occasion de répondre à des critiques qui nous ont été faites au sujet de quelques théorèmes contenus dans la première édition de cet Ouvrage ; on oubliait sans doute la seconde partie de la démonstration, sur laquelle, pour éviter les longueurs et les répétitions, nous n'avons pas toujours assez insisté.

Après cette étude générale des fonctions, nous nous occupons spécialement des fonctions doublement périodiques. Les fonctions elliptiques sont les plus simples d'entre elles. Ce sont les intégrales elliptiques qui se sont présentées d'abord dans le Calcul intégral ; elles ont été étudiées à ce point de vue, dès 1786, par Legendre, qui en a trouvé un grand nombre de propriétés ; le grand *Traité des Fonctions elliptiques*, publié en 1825, contient le résultat de ses longues et patientes recherches. Abel, le premier, en 1826, a considéré les fonctions elliptiques proprement dites, qui sont les inverses de ces intégrales, et a reconnu l'existence des deux périodes. Vers la même époque, Jacobi s'est occupé du même sujet, et les immortels travaux de ces deux grands géomètres ont paru dans les premiers volumes du *Journal de Crelle*.

Les recherches d'Abel ne se rapportent pas seulement aux transcendantes elliptiques, mais à d'autres transcendantes d'un ordre plus élevé : il a découvert à ce sujet un théorème que l'on regarde comme une des plus belles conquêtes de l'Analyse moderne. La considération du chemin suivant lequel s'effectue l'intégration, d'après les principes posés par Cauchy, était nécessaire pour donner à ce théorème son sens précis et sa vraie signification. C'est en suivant la voie ouverte par Abel qu'un grand nombre de géomètres éminents de notre époque ont enrichi la Science de leurs brillantes découvertes.

Nous devons rappeler que M. Liouville a exposé, dans un cours professé au Collége de France, une théorie des fonctions elliptiques basée sur la considération de la double périodicité. Le programme de ce cours a été publié dans les *Comptes rendus* de 1851. Les savantes leçons de l'illustre géomètre, et les beaux travaux de M. Hermite sur le même sujet, ont été le point de départ de nos propres recherches. Nous devons beaucoup aux affectueux conseils que M. Hermite a bien voulu nous donner pour cette seconde édition de notre Ouvrage.

LIVRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Transformation générale de Jacobi.

260. Étant donnée une expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, où Y désigne un polynôme entier du quatrième degré en y, la question traitée par Jacobi (*Fundamenta nova theoriæ fonctionum ellipticarum*, 1829) consiste à déterminer deux polynômes U et V entiers en x, tous deux du degré p, ou l'un du degré p, l'autre du degré $p-1$, de telle sorte que, si l'on pose $y = \frac{U}{V}$, l'expression différentielle proposée se transforme en une autre de la même forme $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X désignant un polynôme entier en x du quatrième degré.

Soit

$$Y = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d);$$

on a

$$\sqrt{Y} = \frac{1}{V^2}\sqrt{(U-aV)(U-bV)(U-cV)(U-dV)}.$$

Le polynôme en x placé sous le radical est du degré $4p$. Supposons-le décomposé en ses facteurs premiers; pour que la transformation s'opère,

il est nécessaire que tous ces facteurs soient doubles, excepté quatre; alors un polynôme du degré $2p - 2$ sortira du radical, et il restera sous le radical un polynôme du quatrième degré.

Cette condition suffit. On a, en effet,

$$dy = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{V^2} dx.$$

Le polynôme $M = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$ est du degré $2p - 2$; car, si les deux polynômes U et V sont du degré p, les deux termes du degré $2p - 1$ se détruisent. Les facteurs doubles sous le radical ne proviennent pas de deux facteurs distincts; car, si une valeur de x annulait, par exemple, $U - aV$ et $U - bV$, elle annulerait les deux polynômes U et V, que l'on peut supposer premiers entre eux. En mettant M sous la forme

$$M = V\frac{d(U - aV)}{dx} - (U - aV)\frac{dV}{dx},$$

on reconnaît que tout facteur double de $U - aV$ divise M. Le polynôme du degré $2p - 2$, que nous faisons sortir du radical, divise donc le polynôme M, qui est du même degré; le quotient est une constante, et, par conséquent, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

X étant un polynôme du quatrième degré en x.

Transformation du premier degré.

261. Lorsque les polynômes U et V sont du premier degré, la transformation réussit, quels que soient les coefficients de ces polynômes. Si l'on pose $y = \frac{m + nx}{1 + x}$, on a, en effet,

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{(n - m)dx}{\sqrt{[(m-a)+(n-a)x][(m-b)+(n-b)x][(m-c)+(n-c)x][(m-d)+(n-d)x]}}.$$

On peut déterminer les coefficients m et n de manière que le polynôme du quatrième degré en x, placé sous le radical, ne contienne que des termes de degrés pairs; il suffit pour cela que, dans le produit des deux premiers facteurs et dans celui des deux derniers, les termes du premier degré soient nuls, ce qui donne les deux conditions

$$(m-a)(n-b)+(n-a)(m-b)=0,$$
$$(m-c)(n-d)+(n-c)(m-d)=0;$$

d'où l'on déduit

$$2mn-(a+b)(m+n)+2ab=0,$$
$$2mn-(c+d)(m+n)+2cd=0,$$

et, par suite,

(1) $$m+n=\frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d},$$

(2) $$m-n=2\frac{\sqrt{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}}{a+b-c-d}.$$

(3) $$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{(n-m)\,dx}{\sqrt{[(m-a)(m-b)+(n-a)(n-b)x^2][(m-c)(m-d)+(n-c)(n-d)x^2]}}.$$

Une transformation ultérieure très-simple ramènera le polynôme X, placé sous le radical, à la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$.

Autre transformation du premier degré.

262. En introduisant une constante de plus dans la formule de transformation, on peut effectuer d'un seul coup la transformation complète. Si l'on pose, en effet, $y=\frac{m+nx}{1+n'x}$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{(n-mn')\,dx}{\sqrt{[(m-a)+(n-n'a)x][(m-b)+(n-n'b)x][(m-c)+(n-n'c)x][(m-d)+(n-n'd)x]}}.$$

Le polynôme du quatrième degré en x sera ramené à la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, si l'on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{n-n'a}{m-a}=1, & \dfrac{n-n'c}{m-c}=k,\\[2ex] \dfrac{n-n'b}{m-b}=-1, & \dfrac{n-n'd}{m-d}=-k,\end{array}\right.$$

ce qui fait quatre équations à quatre inconnues m, n, n', k. On déduit de deux d'entre elles

$$(5)\qquad n'=\frac{a+b-2m}{a-b},\quad n=\frac{2ab-m(a+b)}{a-b},$$

et, en remplaçant dans les deux autres,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2ab-(a+b)c+c(a-b)k=m[a+b-2c+(a-b)k],\\ 2ab-(a+b)d-d(a-b)k=m[a+b-2d-(a-b)k];\end{array}\right.$$

l'élimination de m conduit à une équation du second degré

$$(7)\qquad (a-b)(c-d)(k^2+1)-2[(a+b)(c+d)-2ab-2cd]k=0.$$

Remarquons que

$$(a+b)(c+d)-2ab-2cd=(a-d)(c-b)+(a-c)(d-b)=\mathrm{A}+\mathrm{B},$$
$$(a-b)(c-d)=(a-d)(c-b)-(a-c)(d-b)=\mathrm{A}-\mathrm{B}.$$

En résolvant l'équation du second degré, on trouve

$$k=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\mp2\sqrt{\mathrm{AB}}}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=\frac{(\sqrt{\mathrm{A}}\mp\sqrt{\mathrm{B}})^2}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{\mathrm{A}}\mp\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{H}=\sqrt{(a-d)(c-b)},\quad \mathrm{H}'=\sqrt{(a-c)(d-b)},$$

on aura

$$(8)\qquad k=\frac{H-H'}{H+H'}.$$

De l'une des équations (6), on tire ensuite

$$m=\frac{b(a-c)H-a(c-b)H'}{(a-c)H-(c-b)H'}.$$

En divisant les deux termes par $\sqrt{(a-c)(c-b)}$ et posant

$$G=\sqrt{(a-c)(a-d)},\quad G'=\sqrt{(c-b)(d-b)},$$

on a

$$(9)\qquad m=\frac{bG-aG'}{G-G'},\quad n=\frac{bG+aG'}{G-G'},\quad n'=\frac{G+G'}{G-G'}.$$

On en déduit

$$m-a=-\frac{(a-b)G}{G-G'},\quad m-b=-\frac{(a-b)G'}{G-G'},$$

$$m-c=-\frac{(c-b)G+(a-c)G'}{G-G'}=-\sqrt{(c-b)(a-c)}\,\frac{H+H'}{G-G'},$$

$$m-d=-\frac{(d-b)G+(a-d)G'}{G-G'}=-\sqrt{(d-b)(a-d)}\,\frac{H+H'}{G-G'},$$

$$n-mn'=\frac{2(a-b)GG'}{(G-G')^2},$$

$$\sqrt{(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)}=\frac{(a-b)GG'(H+H')}{(G-G')^2}.$$

La formule de transformation devient

$$(10)\qquad y=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\,\frac{n'+x}{1+n'x},$$

et, si l'on pose $g=\dfrac{H+H'}{2}$, on a

$$(11)\qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Il résulte de là que l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{Y}$$

est ramenée à celle de l'équation

$$\frac{dx}{dz} = g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

dont la fonction intégrale est $x = \lambda(z - z_0, g, k)$.

Nous avons effectué la transformation en disposant dans un certain ordre les quatre facteurs du premier degré qui forment le polynôme Y. Examinons combien on obtient de transformations, en disposant ces facteurs dans différents ordres. Lorsqu'on permute les deux lettres a et b, ou les deux lettres c et d, les deux racines de l'équation (7) et, par conséquent, les deux valeurs de k changent de signe; mais on obtient la même expression transformée (11). Si l'on permute en même temps a et c, b et d, l'équation (7) ne change pas. En ne distinguant pas les valeurs de k égales et de signes contraires, on n'a ainsi que trois équations différentes du second degré; elles correspondent aux trois dispositions (a, b, c, d), (a, c, b, d), (a, d, b, c), et donnent six valeurs de k réciproques deux à deux.

Première transformation du second degré.

263. Lorsque les polynômes U et V sont du second degré, chacun des facteurs sous le radical étant du second degré, il est nécessaire que deux de ces facteurs soient carrés parfaits. Nous choisirons donc les deux polynômes U et V, de manière que l'on ait

$$(12) \qquad U - aV = A(m' + mx)^2, \quad U - bV = B(n' + nx)^2;$$

la formule de transformation sera

$$(13) \qquad \frac{y-b}{y-a} = \frac{B}{A}\frac{(n'+nx)^2}{(m'+mx)^2},$$

et nous aurons

$$dy = \frac{V dU - U dV}{V^2} = \frac{(U - bV) d(U - aV) - (U - aV) d(U - bV)}{(a - b) V^2},$$

$$dy = \frac{2 AB (mn' - nm') (m' + mx) (n' + nx) dx}{(a - b) V^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2 (mn' - nm') \sqrt{AB}}{a - b} \frac{dx}{\sqrt{(U - cV)(U - dV)}}.$$

La transformation réussit, quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes m, m', n, n', A, B, que l'on peut réduire à quatre, pourvu que la quantité $mn' - nm'$ soit différente de zéro.

Proposons-nous maintenant de déterminer ces constantes, de manière que le polynôme du quatrième degré en x, placé sous le radical, ait la forme canonique $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. Il y a deux manières d'y arriver : c'est de poser, soit

$$(14) \qquad U - cV = C(1 - x^2), \quad U - dV = D(1 - k^2x^2),$$

soit

$$(15) \qquad U - cV = C(1 - x)(1 - kx), \quad U - dV = D(1 + x)(1 + kx).$$

Examinons d'abord le premier mode. Des équations (14), on déduit

$$\frac{y - c}{y - d} = \frac{C}{D} \frac{1 - x^2}{1 - k^2x^2};$$

cette expression de y ne contenant pas la première puissance de x, il est nécessaire que le second membre de l'équation (13) ne la contienne pas non plus, ce qui exige que l'on ait, par exemple, $m = 0$, $n' = 0$. On peut, dans ce cas, faire $m' = n = 1$, et réduire les équations (12) et (13) à la forme

$$(16) \qquad U - aV = A, \quad U - bV = Bx^2,$$

$$(17) \qquad \frac{y - b}{y - a} = \frac{B}{A} x^2.$$

Pour que les polynômes $U - cV$, $U - dV$, qui ne contiennent pas la première puissance de x, aient la forme voulue, il est nécessaire et il suffit qu'ils s'annulent, le premier pour $x = 1$, le second pour $x = \frac{1}{k}$, c'est-à-dire que les valeurs correspondantes de y soient c et d; il en résulte, d'après l'équation (17), les deux relations

$$\frac{c-b}{c-a} = \frac{B}{A}, \quad \frac{d-b}{d-a} = \frac{B}{A}\frac{1}{k^2}, \tag{18}$$

d'où

$$k = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}. \tag{19}$$

On en déduit le module complémentaire

$$k' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}.$$

On déterminera les coefficients C et D, en remarquant qu'à $x = 0$ correspond $y = b$; d'où

$$\frac{C}{A} = \frac{b-c}{b-a}, \quad \frac{D}{A} = \frac{b-d}{b-a}; \tag{20}$$

le coefficient A reste arbitraire.

La formule de transformation (17) devient

$$y = \frac{b(c-a) - a(c-b)x^2}{(c-a) - (c-b)x^2}, \tag{21}$$

et si l'on pose

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)}, \tag{22}$$

on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Deuxième transformation du second degré.

264. Examinons maintenant le second mode. Nous avons posé

$$(15)\qquad U - cV = C(1-x)(1-kx), \quad U - dV = D(1+x)(1+kx).$$

Pour que les polynômes $U - cV$, $U - dV$ aient la forme voulue, il est nécessaire et il suffit qu'ils s'annulent, le premier pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{k}$, le second pour $x = -1$ et $x = -\frac{1}{k}$, ou, ce qui est la même chose, que les valeurs correspondantes de y soient $y = c$ et $y = d$. Il en résulte, d'après l'équation (13), les quatre conditions

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{c-b}{c-a} = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'+n}{m'+m}\right)^2 = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'k+n}{m'k+m}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{d-b}{d-a} = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'-n}{m'-m}\right)^2 = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'k-n}{m'k-m}\right)^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$\left(\frac{n'k+n}{m'k+m}\right)^2 = \left(\frac{n'+n}{m'+m}\right)^2, \quad \left(\frac{n'k-n}{m'k-m}\right)^2 = \left(\frac{n'-k}{m'-m}\right)^2,$$

et par suite

$$\frac{n'k+n}{m'k+m} = \pm\frac{n'+n}{m'+m}, \quad \frac{n'k-n}{m'k-m} = \pm\frac{n'-n}{m'-m};$$

il faut prendre le signe $-$ devant les deux seconds membres, sans quoi on aurait $k = 1$, $U - cV$ et $U - dV$ seraient carrés parfaits; mais déjà nous avons supposé que les deux polynômes $U - aV$, $U - bV$ sont carrés parfaits; or il est facile de s'assurer que les quatre polynômes ne peuvent être à la fois carrés parfaits. On a donc

$$\frac{n'k+n}{m'k+m} = -\frac{n'+n}{m'+m}, \quad \frac{n'k-n}{m'k-m} = -\frac{n'-n}{m'-m},$$

d'où

$$k = -\frac{mn}{m'n'}, \quad mn' + nm' = 0.$$

Aucune des deux constantes m' et n' ne peut être nulle; on fera pour simplifier $m' = n' = 1$; on a ainsi $n = -m$, $k = m^2$; on prendra $m = \sqrt{k}$, $n = -\sqrt{k}$. Si l'on remplace m et n par leurs valeurs, les relations (23) deviennent

$$(24) \qquad \frac{c-b}{c-a} = \frac{B}{A}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad \frac{d-b}{d-a} = \frac{B}{A}\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2.$$

On en déduit

$$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} = \sqrt[4]{\frac{(a-c)(d-b)}{(a-d)(c-b)}}.$$

Si l'on pose, comme au n° 262,

$$H = \sqrt{(a-d)(c-b)}, \quad H' = \sqrt{(a-c)(d-b)},$$

on a

$$(25) \qquad \sqrt{k} = -\frac{\sqrt{H}-\sqrt{H'}}{\sqrt{H}+\sqrt{H'}}.$$

L'une des équations (24) donne le rapport

$$(26) \qquad \frac{B}{A} = \frac{c-b}{c-a}\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2.$$

On obtient les deux rapports $\frac{C}{A}$ et $\frac{D}{A}$, en remarquant qu'aux valeurs $x = -1$, $x = 1$ correspondent respectivement les valeurs $y = d$, $y = c$ et comparant les expressions (12) et (15); on trouve ainsi

$$(27) \qquad \frac{C}{A} = \frac{d-c}{d-a}\,\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2(1+k)}, \quad \frac{D}{A} = \frac{c-d}{c-a}\,\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2(1+k)}.$$

La formule de transformation est

$$(28)\qquad \frac{y-b}{y-a}=\frac{c-b}{c-a}\left[\frac{(1+\sqrt{k})(1-x\sqrt{k})}{(1-\sqrt{k})(1+x\sqrt{k})}\right]^2,$$

et l'on a (*Fundamenta* de Jacobi)

$$(29)\qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{4\sqrt{k}}{a-b}\sqrt{\frac{AB}{CD}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Transformations réelles.

265. Lorsque le polynôme Y a ses coefficients réels, et que y varie entre des limites telles, que $\sqrt{\pm Y}$ soit réelle, ce qui a lieu dans les applications, on cherche à opérer la transformation à l'aide d'une formule réelle, et de manière que le module k soit inférieur à l'unité et que x varie entre -1 et $+1$. Il y a plusieurs cas à considérer, suivant que les quatre racines du polynôme Y sont réelles, deux réelles et deux imaginaires, ou les quatre imaginaires, et que le polynôme, sous le radical, est précédé du signe + ou du signe —.

Considérons d'abord le cas où les *quatre racines sont réelles*. Nous les supposerons rangées par ordre de grandeurs croissantes, savoir : $a<b<c<d$. Nous opérerons la transformation par une formule du second degré, et nous adopterons de préférence le premier mode, qui est plus simple que le second (n° 263) :

1° Soit d'abord à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour que le radical soit réel, il faut que y varie de b à c, ou de d à $+\infty$ et de $-\infty$ à a.

Dans le premier cas, nous prendrons les formules telles qu'elles ont été établies

$$(30)\quad k=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},\quad k'=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},\quad g=\frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)},$$

$$(31)\qquad y=\frac{b(c-a)-a(c-b)x^2}{(c-a)-(c-b)x^2};$$

le module k et le multiplicateur g sont réels, et le module inférieur à

l'unité. La formule inverse

$$x^2 = \frac{(c-a)(y-b)}{(c-b)(y-a)} = \frac{c-a}{c-b}\left(1 - \frac{b-a}{y-a}\right),$$

déduite de l'équation (17), montre que, quand y croît de b à c, x croît de 0 à 1.

Dans le second cas, nous prendrons les formules que l'on déduit des précédentes, en permutant a et c, b et d; le module et le multiplicateur ne changent pas; la formule de transformation devient

$$(32) \qquad y = \frac{d(c-a) - c(d-a)x^2}{(c-a) - (d-a)x^2}.$$

La formule inverse

$$x^2 = \frac{(c-a)(y-d)}{(d-a)(y-c)} = \frac{c-a}{d-a}\left(1 - \frac{d-c}{y-c}\right)$$

montre que, quand y croît de d à $+\infty$, puis de $-\infty$ à a, x croît de 0 à $\sqrt{\frac{c-a}{d-a}}$, puis de cette quantité à 1.

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{-Y}}$. Pour que le radical soit réel, il faut que y varie de a à b ou de c à d. Dans le premier cas, nous prendrons les formules que l'on déduit de (30) et (31) par une permutation circulaire des quatre lettres a, b, c, d en sens rétrograde, en ayant soin toutefois de multiplier g par $\sqrt{-1}$,

$$(33) \quad k = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}, \quad k' = \sqrt{\frac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)}}, \quad g = \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)},$$

$$(34) \qquad y = \frac{a(d-b) + d(b-a)x^2}{(d-b) + (b-a)x^2}, \quad x^2 = \frac{(d-b)(y-a)}{(b-a)(d-y)}.$$

Quand y croît de a à b, x croît de 0 à 1.

On obtient les formules relatives au second cas en permutant dans les formules précédentes a et c, b et d; le module et le multiplicateur

ne changent pas; la formule de transformation devient

$$(35)\qquad y=\frac{c(d-b)-b(d-c)x^2}{(d-b)-(d-c)x^2},\quad x^2=\frac{d-b}{d-c}\left(1-\frac{c-b}{y-b}\right).$$

Quand y croît de c à d, x croît de 0 à 1.

266. On déduit facilement de ce qui précède les formules de transformation relatives au cas où le polynôme placé sous le radical est du troisième degré; car l'expression

$$\sqrt{\frac{\pm Y}{d}}=\sqrt{\mp(y-a)(y-b)(y-c)\left(1-\frac{y}{d}\right)}$$

se réduit à

$$\sqrt{\mp(y-a)(y-b)(y-c)}=\sqrt{\mp Y_1}$$

quand d augmente indéfiniment. Il suffira d'introduire cette hypothèse dans les formules, en ayant soin de diviser g par $\sqrt{d}$.

Supposons les trois racines réelles et rangées par ordre de grandeurs croissantes, $a<b<c$. 1° Soit d'abord à transformer $\frac{dy}{\sqrt{-Y_1}}$; pour que le radical soit réel, il faut que y varie de b à c ou de $-\infty$ à a. Dans le premier cas, on emploiera les formules (30) et (31), qui se réduisent à

$$(36)\qquad k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},\quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},\quad g=\frac{1}{2}\sqrt{c-a},$$

$$(37)\qquad y=\frac{b(c-a)-a(c-b)x^2}{(c-a)-(c-b)x^2},\quad x^2=\frac{c-a}{c-b}\left(1-\frac{b-a}{y-a}\right).$$

Quand y croît de b à c, x croît de 0 à 1. Dans le second cas, on emploiera les formules (30) et (32); le module et le multiplicateur sont les mêmes que dans le cas précédent; la formule de transformation se réduit à

$$(38)\qquad y=c-\frac{c-a}{x^2},\quad x^2=\frac{c-a}{c-y}.$$

Quand y croît de $-\infty$ à a, x croît de 0 à 1.

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y_1}}$. Pour que le radical soit réel,

il faut que y varie de a à b ou de c à $+\infty$. Dans le premier cas, on prendra les formules (33) et (34), qui se réduisent à

$$(39) \qquad k=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \quad k'=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}}, \quad g=\frac{1}{2}\sqrt{c-a},$$

$$(40) \qquad y=a+(b-a)x^2, \quad x^2=\frac{y-a}{b-a}.$$

Quand y croît de a à b, x croît de 0 à 1. Dans le second cas, on prendra les formules (33) et (35). Le module et le multiplicateur sont les mêmes que dans le cas précédent; la formule de transformation devient

$$(41) \qquad y=\frac{c-bx^2}{1-x^2}, \quad x^2=1-\frac{c-b}{y-b}.$$

Quand y croît de c à $+\infty$, x croît de 0 à 1.

267. Considérons actuellement le cas où le polynôme du quatrième degré Y a *deux racines réelles et deux imaginaires*. Soient a et b les deux racines réelles, a étant plus grand que b, $c=\alpha+\beta i$, $d=\alpha-\beta i$ les deux racines imaginaires, β étant un nombre positif. Nous commencerons par opérer la transformation du premier degré la plus simple, celle qui consiste à faire disparaître les termes du premier degré dans le polynôme X (n° 261). On a posé, pour cela, $y=\frac{m+nx}{1+x}$; on détermine les deux constantes m et n à l'aide des formules (1) et (2), qui deviennent ici

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} m+n &= \frac{2(ab-\alpha^2-\beta^2)}{a+b-2\alpha}, \\ m-n &= 2\,\frac{\sqrt{[(a-\alpha)^2+\beta^2][(b-\alpha)^2+\beta^2]}}{a+b-2\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Pour effectuer le calcul, nous emploierons deux angles auxiliaires φ_1 et φ_2, définis par les formules

$$(43) \qquad \operatorname{tang}\varphi_1=\frac{a-\alpha}{\beta}, \quad \operatorname{tang}\varphi_2=\frac{b-\alpha}{\beta},$$

et nous poserons

$$(44) \qquad \varphi' = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \varphi'' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Des formules (43) on déduit

$$(45) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}\dfrac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi''}, \\ \beta = \dfrac{(a-b)\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin 2\varphi''} = \dfrac{a-b}{2}\dfrac{\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi''}. \end{cases}$$

Les équations (42) deviennent

$$m + n = (a+b) - (a-b)\frac{1 + \cos 2\varphi' \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi' \sin 2\varphi''},$$

$$m - n = (a-b)\frac{\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi' \sin 2\varphi''},$$

d'où

$$(46) \qquad m = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'', \quad n = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cot\varphi' \cot\varphi''.$$

On en déduit

$$m - a = -\frac{a-b}{2}\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi'\cos\varphi''}, \qquad n - a = -\frac{a-b}{2}\frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi'\sin\varphi''},$$

$$m - b = \frac{a-b}{2}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi'\cos\varphi''}, \qquad n - b = -\frac{a-b}{2}\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi'\sin\varphi''},$$

$$m - \alpha = (a-b)\frac{\sin\varphi'\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin 2\varphi''\cos\varphi'}, \quad n - \alpha = -(a-b)\frac{\cos\varphi'\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin 2\varphi''\sin\varphi'},$$

$$(m-a)(m-b) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi'\cos^2\varphi''},$$

$$(n-a)(n-b) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''},$$

$$(m-c)(m-d) = (m-\alpha)^2 + \beta^2 = (a-b)^2\frac{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2}{\sin^2 2\varphi''\cos^2\varphi'},$$

$$(n-c)(n-d) = (n-\alpha)^2 + \beta^2 = (a-b)^2\frac{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2}{\sin^2 2\varphi''\sin^2\varphi'}.$$

La formule de transformation $y = \frac{m+nx}{1+x}$ devient

$$(47) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,\frac{\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi'' + x\cot\varphi'\cot\varphi''}{1+x},$$

et l'on a

$$(48) \quad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = -\frac{2}{a-b}\,\frac{\cot\varphi'\cos\varphi''}{\sqrt{\mp\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2\cot^2\varphi'\cot^2\varphi'')(1+x^2\cot^2\varphi')}}.$$

On effectuera une seconde transformation en posant

$$(49) \qquad x = \operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi''\cos\varphi,$$

ce qui donne

$$(50) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,\frac{\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi'' + \cos\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi''\cos\varphi},$$

$$(51) \qquad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = \pm\frac{\sqrt{\mp\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}{\beta}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi''\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on pose enfin

$$(52) \qquad k = \sin\varphi'', \quad g = \frac{\beta}{\sqrt{\mp\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}, \quad h = \operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\varphi'',$$

on a

$$(53) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,\frac{h+\cos\varphi}{1+h\cos\varphi},$$

$$(54) \qquad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = \frac{\pm d\varphi}{g\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et l'expression différentielle est ramenée à la forme simple des intégrales elliptiques (n° **230**).

1° Proposons-nous d'abord de transformer l'expression $\frac{dy}{\sqrt{-Y}}$. Le radical n'est réel que si y varie de b à a. Appelons ψ_1 et ψ_2 les angles définis par les formules (43), et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; dans le cas actuel, nous prendrons $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$; de cette manière, $\cos\varphi_1$ et

$\cos\varphi_2$ sont positifs, et le multiplicateur g réel; β étant positif et a plus grand que b, l'angle $\varphi'' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ est positif; puisque $\frac{1+h}{1-h} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$, la constante h est comprise entre -1 et $+1$. La formule de transformation (53) pouvant être mise sous la forme

$$(55) \qquad y = b + \frac{a-b}{1 + \frac{1+h}{1-h}\cot^2\frac{\varphi}{2}} = b + \frac{a-b}{1 + \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\cot^2\frac{\varphi}{2}},$$

on voit que, quand φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, y croît de b à a. On mettra donc le signe $+$ devant le second membre de l'équation (54).

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Le radical est réel quand y varie de a à $+\infty$ et de $-\infty$ à b. Nous prendrons ici $\varphi_2 = \psi_2$ et $\varphi_1 = \psi_1 + \pi$; de cette manière, $\cos\varphi_2$ étant positif, $\cos\varphi_1$ négatif, le multiplicateur g est réel; la constante h est plus grande que 1 en valeur absolue. L'angle $\varphi'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. La formule (55) montre que, quand φ croît de 0 à l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{h}$, y décroît de b à $-\infty$, et que, quand φ croît de cet angle à π, y décroît de $+\infty$ à a. Il faudra mettre le signe $-$ devant le second membre de l'équation (54).

268. Le cas où le polynôme est du troisième degré et n'a qu'une racine réelle se déduit du précédent; car l'expression

$$\sqrt{\frac{\pm Y}{a}} = \sqrt{\mp(y-b)(y-c)(y-d)\left(1 - \frac{y}{a}\right)}$$

se réduit à

$$\sqrt{\mp(y-b)(y-c)(y-d)} = \sqrt{\mp Y_1},$$

quand a augmente indéfiniment. Il faudra diviser g par $\sqrt{a}$: on a alors $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $h = 1$, et, en prenant $\varphi_2 = \psi_2$,

$$(56) \qquad k = \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi_2}{2}\right), \quad g = \sqrt{\frac{\beta}{\cos\varphi_2}}.$$

La formule de transformation (50) peut être mise sous la forme

$$y = \frac{a\cos\varphi_1 \sin^2\frac{\varphi}{2} + b\cos\varphi_2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi_2\cos^2\frac{\varphi}{2}};$$

si l'on remarque que $a\cos\varphi_1$ tend vers la limite $\mp\beta$, elle se réduit à

$$(57)\qquad y = b \mp \frac{\beta}{\cos\varphi_2}\,\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}.$$

269. Il nous reste à examiner le cas où le polynôme du quatrième degré Y a ses *quatre racines imaginaires* $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha - \beta i$, $c = \gamma + \delta i$, $d = \gamma - \delta i$, β et δ étant supposés positifs et $\alpha - \gamma$ positif. Nous commencerons encore par effectuer la transformation du premier degré en posant $y = \frac{m + nx}{1 + x}$, de manière à faire disparaître les termes du premier degré (n° **261**). On a

$$m + n = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{\alpha - \gamma},$$

$$m - n = \frac{\sqrt{[(\alpha-\gamma)^2 + (\beta+\delta)^2][(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2]}}{\alpha - \gamma}.$$

Posons

$$(58)\qquad \text{tang}\,\varphi_1 = \frac{\beta+\delta}{\alpha-\gamma},\quad \text{tang}\,\varphi_2 = \frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma},\quad \varphi' = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\quad \varphi'' = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2},$$

nous aurons

$$m + n = \frac{\alpha\cos 2\varphi'' + \gamma\cos 2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\qquad m - n = \frac{\alpha-\gamma}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},$$

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{\alpha\cos^2\varphi'' - \gamma\sin^2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}, &\quad \beta &= (\alpha-\gamma)\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\\ n &= \frac{-\alpha\sin^2\varphi'' + \gamma\cos^2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}, &\quad \delta &= (\alpha-\gamma)\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\end{aligned}\right.$$

$$(m-\alpha)^2 + \beta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\sin^2\varphi'}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},\qquad (n-\alpha)^2 + \beta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\cos^2\varphi'}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},$$

$$(m-\gamma)^2 + \delta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\cos^2\varphi''}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},\qquad (n-\gamma)^2 + \delta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\sin^2\varphi''}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{\cos\varphi'}{\beta\cos\varphi''}\,\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2\cot^2\varphi')(1 + x^2\,\text{tang}^2\varphi'')}}.$$

Pour achever la transformation, on posera $x = -\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi$, d'où

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\sin\varphi'}{\beta\cos\varphi''}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi'\cos^2\varphi''}\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on pose ensuite

$$(60)\qquad k^2 = 1 - \operatorname{tang}^2\varphi' \operatorname{tang}^2\varphi'' = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi'\cos^2\varphi''},\quad g = \frac{\beta\cos\varphi''}{\sin\varphi'},$$

on a finalement

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{d\varphi}{g\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On prendra pour φ_1 et φ_2 des angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, de manière que $\cos\varphi_1$ et $\cos\varphi_2$ soient positifs. Le module k est moindre que 1. La formule de transformation est

$$(61)\qquad y = n + \frac{m-n}{1+x} = n + \frac{2\beta}{\sin 2\varphi'}\,\frac{1}{1 - \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi}.$$

Quand φ croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, y croît de n à $+\infty$; φ croissant ensuite de $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ à $\frac{\pi}{2}$, y croît de $-\infty$ à n.

Remarquons que, dans les deux cas traités aux n^{os} **267** et **269**, si l'on pose $\sin\varphi = t$ pour ramener l'intégrale elliptique à la forme canonique, les formules de transformation (50) et (61) sont irrationnelles par rapport à t.

Les trois intégrales elliptiques.

270. Après l'intégration des expressions rationnelles, les géomètres se sont occupés des expressions irrationnelles, et d'abord de celles qui renferment un radical carré. Lorsque le polynôme placé sous le radical est du premier ou du second degré, l'intégrale s'exprime par des quantités algébriques ou logarithmiques; mais il n'en est plus de même lorsque le polynôme est d'un degré plus élevé. Le cas où le polynôme est du troisième ou du quatrième degré donne naissance à une classe d'intégrales définies, que l'on a appelées *intégrales elliptiques*, parce qu'elles servent à l'évaluation des arcs des sections coniques. Le célèbre

théorème d'Euler, dont nous parlerons plus tard, a été le point de départ des recherches sur ce sujet. Legendre a découvert ensuite un grand nombre de propriétés de ces nouvelles transcendantes (*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, 1794); son *Traité des fonctions elliptiques* contient l'exposé de ses propres découvertes et de celles de ses devanciers.

Considérons l'intégrale définie

$$\int F(y, \sqrt{Y})\,dy, \tag{1}$$

où Y désigne un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré, et $F(y, \sqrt{Y})$ une fonction rationnelle en y et $\sqrt{Y}$. Cette fonction peut être mise sous la forme

$$\frac{M + M'\sqrt{Y}}{N + N'\sqrt{Y}} = \frac{(M + M'\sqrt{Y})(N - N'\sqrt{Y})}{N^2 - N'^2 Y} = \frac{P + P'\sqrt{Y}}{Q},$$

M, M', N, N', P, P', Q désignant des polynômes entiers en y; on en déduit

$$\int F(y, \sqrt{Y})\,dy = \int \frac{P}{Q}\,dy + \int \frac{P'\sqrt{Y}}{Q}\,dy.$$

La première intégrale du second membre, portant sur une fraction rationnelle, s'exprime par une fraction rationnelle et des termes de la forme $\log(y - \alpha)$. Il reste à considérer la seconde intégrale, que l'on écrit

$$\int \frac{P'Y}{Q}\,\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Nous avons vu comment, par une substitution du premier ou du second degré, on transforme l'expression $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ en une autre $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynôme du quatrième degré en x de la forme canonique $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. L'intégrale précédente se ramène ainsi à l'intégrale

$$\int f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{2}$$

$f(x)$ désignant une fraction rationnelle en x. Cette fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{M_1 + M'_1 x}{N_1 + N'_1 x} = \frac{(M_1 + M'_1 x)(N_1 - N'_1 x)}{N_1^2 - N'^2_1 x^2} = \frac{P_1 + P'_1 x}{Q_1},$$

$M_1, M'_1, N_1, N'_1, P_1, P'_1, Q_1$ désignant des polynômes entiers en x^2. On a ainsi

$$\int f(x) \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{P_1}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{P'_1 x}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

On obtient la seconde intégrale en posant $x^2 = x'$; car alors le radical ne porte plus que sur un polynôme du second degré. Il reste à étudier l'intégrale

$$(3) \qquad \int \frac{P_1}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

271. La fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q_1}$ peut être décomposée en termes de la forme Ax^{2n}, n étant un nombre entier positif ou négatif, et en termes de la forme $\frac{A}{(x^2 - h^2)^p}$, p étant un nombre entier positif. Considérons d'abord les termes de la première sorte. Soit $X = A + Bx^2 + Cx^4$. On a

$$D_x(x^{2n+1}\sqrt{X}) = (2n+1)x^{2n}\sqrt{X} + \frac{x^{2n+1}(Bx + 2Cx^3)}{\sqrt{X}}$$
$$= \frac{(2n+1)Ax^{2n} + (2n+2)Bx^{2n+2} + (2n+3)Cx^{2n+4}}{\sqrt{X}},$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^{2n+1}\sqrt{X} = (2n+1)A \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}} + (2n+2)B \int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}} \\ + (2n+3)C \int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}}. \end{aligned} \right.$$

Quand n est positif ou nul, cette équation ramène l'intégrale

$$\int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}}$$

aux deux précédentes

$$\int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}}.$$

En opérant ainsi plusieurs fois successivement, on arrive aux deux intégrales

$$(5) \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Quand n est négatif, cette même équation ramène l'intégrale

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}}$$

aux deux autres

$$\int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}},$$

et, après plusieurs opérations successives, on arrive encore aux deux intégrales (5).

272. Considérons maintenant les termes de la seconde sorte, on a

$$\begin{aligned} D_x \frac{x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= \frac{\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} + \frac{x(Bx+2Cx^3)}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} - \frac{2(p-1)x^2\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^p} \\ &= \frac{(A+2Bx^2+3Cx^4)(x^2-h^2)-2(p-1)(Ax^2+Bx^4+Cx^6)}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}}. \end{aligned}$$

Posons

$$A+2Bx^2+3Cx^4 = A_1+2B_1(x^2-h^2)+3C(x^2-h^2)^2,$$

les deux constantes A_1 et B_1 ayant les valeurs

$$A_1 = A+2Bh^2+3Ch^4, \quad B_1 = B+3Ch^2.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par $2x\,dx$, et si l'on intègre, on obtient

$$Ax^2+Bx^4+Cx^6 = E + A_1(x^2-h^2)+B_1(x^2-h^2)^2+C(x^2-h^2)^3,$$

en posant $E = h^2(A + Bh^2 + Ch^4)$. Il en résulte

$$D_x \frac{x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} = -\frac{(2p-2)E}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}} - \frac{(2p-3)A_1}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} - \frac{(2p-4)B_1}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} - \frac{(2p-5)C}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}},$$

et par suite

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{-x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= (2p-2)E\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}} + (2p-3)A_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} \\ &\quad + (2p-4)B_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} + (2p-5)C\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}}. \end{aligned}\right.$$

Si la constante E n'est pas nulle, de cette équation on déduira la première intégrale en fonction des trois suivantes, et, comme l'opération peut être continuée jusqu'à ce que l'on ait $p = 2$, on arrivera à l'intégrale

$$(7)\quad \int\frac{dx}{(x^2-h^2)\sqrt{X}}$$

et à d'autres de la première sorte, se ramenant, par conséquent, aux deux intégrales (5).

Si l'on avait $E = 0$, l'équation se réduirait à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{-x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= (2p-3)A_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} \\ &\quad + (2p-4)B_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} + (2p-5)C\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}}. \end{aligned}\right.$$

Nous remarquons que la constante A_1 ne peut être nulle en même temps que E; car on aurait alors $B^2 - 4AC = 0$, et le polynôme X serait carré parfait. La relation précédente ramène l'intégrale cherchée aux deux intégrales (5).

En résumé, l'intégrale

$$\int F(y, \sqrt{Y})\,dy$$

est ainsi ramenée aux trois intégrales

$$(9) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2-h^2)\sqrt{X}}.$$

A la place de la seconde, Legendre considérait l'intégrale

$$\int \sqrt{X}\,dx,$$

qui s'exprime aisément à l'aide des deux premières.

L'*intégrale de première espèce*

$$(10) \qquad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

est l'inverse de la fonction elliptique $x = \lambda(z, k)$. A chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de z de la forme

$$z + 2m\omega + m'\omega', \quad \omega - z + 2m\omega + m'\omega'.$$

Intégrale elliptique de seconde espèce.

273. L'intégrale elliptique de seconde espèce est

$$(11) \qquad u = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Le radical admet les quatre points critiques $a = 1$, $b = \frac{1}{k}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{k}$ (*fig.* 77, n° **221**), qui sont aussi des points critiques algébriques pour la fonction u. Cette fonction devient infinie avec x, et le point O' sur la sphère est un pôle du second degré pour chacune des branches de la fonction; mais, comme il n'entre dans l'expression que des puissances paires, l'intégrale définie relative au lacet O', ou au circuit qui dans le plan embrasse les quatre points critiques, est nulle, et les périodes se réduisent à deux (n° **113**). A chaque système de cycles

donnant un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce correspond un couple de périodes $2\omega_1$, ω'_1 de l'intégrale de seconde espèce. Il en résulte qu'à chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de u de la forme

$$u + 2m\omega_1 + m'\omega'_1, \quad \omega_1 - u + 2m\omega_1 + m'\omega'_1.$$

Si l'on change de variable en posant $x = \lambda(z, k)$, d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = dz,$$

l'intégrale de seconde espèce prend la forme

$$(12) \qquad u = \zeta(z) = \int_0^z \lambda^2(z)\,dz.$$

Elle devient infinie avec $\lambda(z)$, c'est-à-dire aux points

$$\alpha = \frac{\omega'}{2} + m\omega + m'\omega';$$

si l'on pose $z = \alpha + z'$, on a, dans le voisinage de l'un des points α,

$$\lambda^2(z) = \frac{1}{k^2\lambda^2(z')} = \frac{1}{k^2z'^2} + \beta + \gamma z'^2 + \ldots,$$

$$u = -\frac{1}{k^2z'} + C + \beta z' + \frac{\gamma}{3}z'^3 + \ldots.$$

On en conclut que u est une fonction *méromorphe* de z, admettant comme pôles simples ceux de $\lambda(z)$.

Il est facile d'exprimer cette fonction à l'aide de l'une des fonctions θ ou ϑ, formées avec les deux constantes ω et ω'. De l'équation

$$\lambda^2(z) = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_z^2\log\theta(z)\right] = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - D_z^2\log\vartheta(z)\right],$$

trouvée au n° 169, on déduit en effet

$$(13) \quad \zeta(z) = \frac{1}{k^2}\left[z\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_z\log\theta(z)\right] = \frac{1}{k^2}\left[z\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - D_z\log\vartheta(z)\right].$$

Quand z augmente de ω ou de ω', le second membre éprouve des accroissements constants

$$(14) \qquad \omega_1 = \frac{1}{k^2}\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\omega, \quad \omega'_1 = \frac{1}{k^2}\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\omega' = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} + \frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega';$$

on en déduit la relation

$$(15) \qquad \omega\omega'_1 - \omega'\omega_1 = \frac{2\pi i}{k^2},$$

entre les périodes des intégrales de première et de seconde espèce.

Lorsque le module k est réel et inférieur à l'unité, si z est réelle, la formule (13) ne contient que des quantités réelles; si z est imaginaire et de la forme yi, y étant réelle, le second membre est de la forme Yi, Y étant réelle.

274. Considérons maintenant la fonction inverse x de la variable u, fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x^2},$$

à laquelle on joint la condition initiale $x = 0$ pour $u = 0$. En répétant le raisonnement du n° **219**, on voit que, lorsque la variable u se meut dans le voisinage d'un point où la fonction x acquiert l'une des valeurs ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, la fonction reste monotrope. L'étude de l'intégrale définie montre que, quand x partant de l'origine y revient par différents chemins, u acquiert les valeurs $u_1 = m\omega_1 + m'\omega'_1$; réciproquement, si u va de l'origine à l'un de ces points u_1 par un chemin convenable, la fonction x s'annule. L'équation différentielle

$$du = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$

dont le second membre se développe en une série convergente, pour les valeurs de x dont le module est inférieur à 1 et au module de $\frac{1}{k}$, est de

la forme

$$du = \pm (x^2 + ax^4 + \ldots)\, dx;$$

on en déduit

$$u - u_1 = \pm \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^5}{5} + \ldots\right),$$

$$x = \pm \sqrt[3]{3}\,(u - u_1)^{\frac{1}{3}} + \ldots;$$

ainsi, quand la variable u tourne autour du point u_1, la branche considérée de la fonction x acquiert trois valeurs différentes; ce point est donc un point critique algébrique pour cette branche de la fonction. La fonction x conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de u; on en conclut qu'elle admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de u; car si elle n'en admettait qu'un nombre limité, une fonction symétrique et entière de ces valeurs serait une fonction holomorphe et doublement périodique de u, ce qui est impossible (n° **146**).

Intégrale elliptique de troisième espèce.

275. L'intégrale de troisième espèce est

$$u = \int_0^x \frac{dx}{(x^2 - h^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}. \tag{16}$$

Outre les quatre points critiques du radical $a = 1$, $b = \frac{1}{k}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{k}$, qui sont aussi des points critiques algébriques pour la fonction u, la fonction placée sous le signe d'intégration a deux pôles $x = \pm h$, qui sont des points critiques logarithmiques de la fonction u (n° **60**), et qui fournissent une période polaire

$$\omega'' = \frac{\pi i}{h\sqrt{(1 - h^2)(1 - k^2h^2)}}.$$

Le point O′ sur la sphère étant un point ordinaire, l'intégrale définie relative au circuit qui embrasse tous les points critiques est nulle; il en résulte que, si l'on fait abstraction de la période polaire, toutes les autres périodes se réduisent à deux; à chaque couple de périodes

elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce correspond un couple de périodes $2\omega_2$, ω'_2 de l'intégrale de troisième espèce. Cette intégrale admet donc trois périodes distinctes, de sorte qu'à chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de u de la forme

$$u + 2m\omega_2 + m'\omega''_2 + m''\omega'', \quad \omega_2 - u + 2m\omega_2 + m'\omega'_2 + m''\omega''.$$

Si l'on change de variable en posant $x = \lambda(z, k)$, et si l'on remplace la constante h par $\lambda(a)$, l'intégrale de troisième espèce prend la forme

$$(17) \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)}.$$

Elle devient infinie aux points critiques logarithmiques

$$z = \pm a + m\omega + m'\omega',$$

et admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de z. On peut aussi l'exprimer à l'aide de la fonction θ.

La fonction doublement périodique $\frac{1}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)}$, aux périodes ω, ω', a deux infinis simples $z = \pm a$; les résidus correspondants sont

$$\pm \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)}.$$

On a donc, d'après le théorème de M. Hermite (n° 168),

$$\frac{1}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)} = H + \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)} D_z \log \frac{\theta_1(z-a)}{\theta_1(z+a)},$$

et, en remplaçant z par $z + \frac{\omega'}{2}$,

$$\frac{k^2\lambda^2(z)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = H + \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)} D_z \log \frac{\theta(z-a)}{\theta(z+a)}.$$

Si l'on fait $z = 0$ dans cette dernière équation, on obtient la constante

$$H = \frac{1}{\lambda(a)\lambda'(a)} D_a \log \theta(a).$$

Les deux équations précédentes deviennent ainsi

$$(18)\qquad \frac{\lambda(a)\lambda'(a)}{\lambda^2(z)-\lambda^2(a)} = \mathrm{D}_a \log\theta(a) + \frac{1}{2}\mathrm{D}_z \log\frac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)},$$

$$(19)\qquad \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\lambda^2(z)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = \mathrm{D}_a \log\theta(a) + \frac{1}{2}\mathrm{D}_z \log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)}.$$

On en déduit

$$(20)\quad \int_0^z \frac{\lambda(a)\lambda'(a)\,dz}{\lambda^2(z)-\lambda^2(a)} = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a-z)}{\vartheta_1(a+z)},$$

$$(21)\quad \int_0^z \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\lambda^2(z)\,dz}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-z)}{\vartheta(a+z)},$$

les logarithmes s'annulant pour $z=0$.

C'est à Jacobi que l'on doit l'expression des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce par la fonction θ (*Fundamenta*); l'intégrale (21) est celle que Jacobi appelait spécialement *intégrale de troisième espèce,* et il l'a désignée par le symbole $\Pi(z, a, k)$, ou, plus simplement $\Pi(z, a)$, en sous-entendant le module k. La variable z est l'*argument,* la constante a le *paramètre* de l'intégrale. On a ainsi

$$(22)\quad \Pi(z,a) = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-z)}{\vartheta(a+z)}.$$

Quand z augmente de ω ou de ω', le second membre éprouve des accroissements constants

$$(23)\qquad \omega_2 = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega,\quad \omega'_2 = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega' + \frac{2\pi a i}{\omega}.$$

D'ailleurs le logarithme donne la période polaire $\omega'' = \pi i$. On en déduit la relation

$$(24)\qquad \omega\omega'_2 - \omega'\omega_2 = 2\pi a i,$$

entre les périodes des intégrales de première et de troisième espèce.

276. Examinons maintenant la fonction inverse x de u, fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = (x^2 - h^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $x = 0$ pour $u = 0$. On verra, comme précédemment, que, lorsque la variable u se meut dans le voisinage d'un point où la fonction acquiert l'une des valeurs ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, la fonction reste monotrope. L'étude de l'intégrale définie (16) montre que, quand x s'éloigne à l'infini par un chemin déterminé, u tend vers une valeur finie u_1 ; réciproquement, quand u va de l'origine au point u_1 par un chemin convenable, x devient infinie; en posant $x = \frac{1}{x'}$, on a

$$du = -\frac{x'^2\,dx'}{(1-h^2x'^2)\sqrt{(1-x'^2)(k^2-x'^2)}} = \mp\left(\frac{x'^2}{k} + ax'^4 + \dots\right)dx',$$

$$u - u_1 = \mp\left(\frac{x'^3}{3k} + \frac{ax'^5}{5} + \dots\right),$$

$$x' = \pm\sqrt[3]{3k}\,(u-u_1)^{\frac{1}{3}} + \dots.$$

Ainsi, quand la variable u tourne autour du point u_1, la branche considérée de la fonction x acquiert trois valeurs différentes; ce point est donc un point critique algébrique pour cette branche de la fonction. La fonction x admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de u; car si elle n'admettait qu'un nombre limité, une fonction symétrique de ces valeurs serait une fonction monotrope triplement périodique, ce qui est impossible (n° 143). L'étude de l'intégrale définie (16) montre aussi que u ne devient infinie que quand x tend vers l'une des valeurs $\pm h$; on en conclut que, réciproquement, toutes les branches de la fonction x tendent vers l'une des deux valeurs $\pm h$, quand la variable u s'éloigne à l'infini; sur la sphère, le point $u = \infty$ est un point d'indétermination, et la fonction x se comporte comme une exponentielle (n° 59).

277. De la formule (22) on déduit les suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega}{2}\right) = z\,\dfrac{\theta'_3(a)}{\theta_3(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\theta_3(a-z)}{\theta_3(a+z)}, \\ \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega'}{2}\right) = z\,\dfrac{\theta'_1(a)}{\theta_1(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)}, \\ \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = z\,\dfrac{\theta'_2(a)}{\theta_2(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\theta_2(a-z)}{\theta_2(a+z)}, \end{cases}$$

et celles-ci donnent

$$(26)\quad \begin{cases} \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega}{2}\right) - \Pi(z, a) = z\,\dfrac{\nu'(a)}{\nu(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\nu(a-z)}{\nu(a+z)}, \\ \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega'}{2}\right) - \Pi(z, a) = z\,\dfrac{\lambda'(a)}{\lambda(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\lambda(a-z)}{\lambda(a+z)}, \\ \Pi\left(z, a+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) - \Pi(z, a) = z\,\dfrac{\mu'(a)}{\mu(a)} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\mu(a-z)}{\mu(a+z)}. \end{cases}$$

Si, dans la formule (22), on permute les lettres z et a, il vient

$$\Pi(a, z) = a\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)},$$

d'où

$$(27)\qquad \Pi(z, a) - \Pi(a, z) = z\,\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} - a\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = k^2[a\zeta(z) - z\zeta(a)].$$

Cette dernière relation effectue la permutation du paramètre et de l'argument.

De la formule (22) on déduit encore la relation

$$(28)\quad \begin{cases} \Pi(z, a) = \Pi\left(\dfrac{a+z}{2}, \dfrac{a+z}{2}\right) - \Pi\left(\dfrac{a-z}{2}, \dfrac{a-z}{2}\right) \\ \qquad - \dfrac{a+z}{2}\,\dfrac{\theta'\left(\dfrac{a+z}{2}\right)}{\theta\left(\dfrac{a+z}{2}\right)} + \dfrac{a-z}{2}\,\dfrac{\theta'\left(\dfrac{a-z}{2}\right)}{\theta\left(\dfrac{a-z}{2}\right)} + z\,\dfrac{\theta'(a)}{\theta(a)}, \end{cases}$$

que l'on met sous la forme

$$(29)\quad \begin{cases} \Pi(z,a) = \Pi\left(\dfrac{a+z}{2}, \dfrac{a+z}{2}\right) - \Pi\left(\dfrac{a-z}{2}, \dfrac{a-z}{2}\right) \\ \qquad + k^2\dfrac{a+z}{2}\zeta\left(\dfrac{a+z}{2}\right) - k^2\dfrac{a-z}{2}\zeta\left(\dfrac{a-z}{2}\right) - k^2 z\zeta(a). \end{cases}$$

L'intégrale de troisième espèce $\Pi(z, a)$, qui dépend des trois quantités k, a, z, s'exprime ainsi par une somme de fonctions dont chacune ne dépend que de deux quantités.

278. Dans l'intégrale (21), représentons le dénominateur par $1 + n\lambda^2(z)$, c'est-à-dire posons $n = -k^2\lambda^2(a)$. Si la quantité donnée n est réelle, le module k réel, positif, et moindre que l'unité, et qu'on veuille calculer a, plusieurs cas se présentent : 1° si n est positive, on posera $\lambda^2(ai) = -\frac{n}{k^2}$, a étant réelle et positive (n° **236**), et l'intégrale sera représentée par $\Pi(z, ai)$; 2° si n est comprise entre o et $-k^2$, on posera $\lambda^2(a) = -\frac{n}{k^2}$, a étant réelle et positive, et l'intégrale sera $\Pi(z, a)$; 3° si n est comprise entre $-k^2$ et -1, on posera $\lambda^2\left(ai + \frac{\omega}{2}\right) = -\frac{n}{k^2}$, a étant encore réelle et positive (n° **225**), et l'intégrale sera $\Pi\left(z, ai + \frac{\omega}{2}\right)$; 4° si n est comprise entre -1 et $-\infty$, on posera $\lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{n}{k^2}$, a étant toujours réelle et positive, ce qui donne l'intégrale $\Pi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right)$. D'après les formules (25), le troisième cas se ramène au premier, et le quatrième au second; et, par conséquent, dans l'intégrale de troisième espèce, lorsque la quantité n est réelle, on peut supposer le paramètre a réel ou de la forme ai, a étant réelle.

Considérons le cas où la variable z est réelle. Si le paramètre a est réel, le second membre de l'équation (22) ne contient que des quantités réelles. Si le paramètre a est imaginaire et de la forme $a'i$, d'après la définition, la fonction Π est imaginaire et de la forme Ai; les termes du second membre présentent la même forme, mais chacune des deux

fonctions $\theta(a-z)$, $\theta(a+z)$ dépend de trois quantités réelles distinctes k, z et a'.

Considérons maintenant le cas où z est imaginaire et de la forme yi. Lorsque le paramètre a est réel, ce cas se ramène au précédent par la permutation du paramètre et de l'argument. Lorsque le paramètre a est imaginaire et de la forme $a'i$, les deux fonctions $\theta(a-z)$, $\theta(a+z)$ sont de la forme $\theta(bi)$, b étant réel, et on les obtient sans difficulté.

Remarques sur les périodes.

279. Considérons deux périodes correspondantes quelconques Ω et Ω_1 des intégrales elliptiques de première et de seconde espèces; ces périodes sont les intégrales définies

$$\Omega = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \Omega_1 = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x},$$

relatives à un même cycle partant de l'origine et y revenant; ce sont des fonctions du module k qui ont pour dérivées

$$\frac{d\Omega}{dk} = k\int \frac{x^2 dx}{(1-k^2x^2)\Delta x}, \quad \frac{d\Omega_1}{dk} = k\int \frac{x^4 dx}{(1-k^2x^2)\Delta x}.$$

De l'égalité

$$D_x \frac{x(1-x^2)}{\Delta x} = \frac{1-x^2}{\Delta x} - \frac{k'^2 x^2}{(1-k^2x^2)\Delta x},$$

on déduit par l'intégration

$$(30) \qquad \frac{d\Omega}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\Omega - \Omega_1).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d\Omega}{dk} - k^2 \frac{d\Omega_1}{dk} = k\Omega_1,$$

d'où

$$(31) \qquad \frac{d\Omega_1}{dk} = \frac{1}{kk'^2}[\Omega - (2-k^2)\Omega_1].$$

Des deux équations différentielles simultanées (30) et (31) on déduit les équations différentielles du second ordre

$$(32) \qquad \frac{\left(kk'^2 \frac{d\Omega}{dk}\right)}{dk} = k\Omega, \qquad \frac{d\left(k^3 k'^2 \frac{d\Omega_1}{dk}\right)}{dk} = 3k^2\Omega_1,$$

auxquelles satisfont séparément les périodes Ω et Ω_1.

Si l'on considère en particulier les cycles qui se rapportent à un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce, il résulte de ce qui précède que les premières périodes 2ω, $2\omega_1$ satisfont aux équations différentielles simultanées (30) et (31), ainsi qu'aux équations du second ordre (32), et que les secondes périodes ω', ω'_1 satisfont aussi à ces mêmes équations. En remplaçant dans les équations

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\omega - \omega_1), \qquad \frac{d\omega'}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\omega' - \omega'_1)$$

ω_1 et ω'_1 par leurs valeurs données par les formules (14), on obtient les deux équations différentielles du premier ordre

$$(33) \qquad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{kk'^2}\left[k^2 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right]\omega,$$

$$(34) \qquad \frac{d\omega'}{dk} = \frac{1}{kk'^2}\left[k^2 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega',$$

auxquelles satisfont ω, ω'; on en déduit

$$(35) \qquad \omega\frac{d\omega'}{dk} - \omega'\frac{d\omega}{dk} = -\frac{2\pi i}{kk'^2}.$$

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES ENTIÈRES.

Développement de la fonction inverse.

280. Si l'on pose $u = \lambda(z)$, on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-(1+k^2)u^2+k^2u^4}}.$$

Le second membre est développable suivant les puissances entières de u, pour les valeurs ayant un module inférieur à 1 ou au module de $\frac{1}{k}$. On obtient ce développement à l'aide d'une formule

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{z}{1}D_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{z^2}{1.2}D_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots,$$

établie au n° 97. En remplaçant, dans cette formule, z par ku^2 et posant $\alpha = \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$, on en déduit

$$[1-(1+k^2)u^2+k^2u^4]^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{ku^2}{1}D_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{k^2u^4}{1.2}D_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots,$$

et, par suite, en intégrant,

$$(1)\qquad z = u+\frac{k}{1}\frac{u^3}{3}D_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{k^2}{1.2}\frac{u^5}{5}D_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots.$$

Nous représenterons cette série par

$$(2)\qquad z = u+a_1u^3+a_2u^5+\ldots.$$

57.

Un coefficient quelconque

(3) $$a_n = \frac{1}{2n+1}\,\frac{k^n}{1.2\ldots n}\,D_\alpha^n\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^n$$

est un polynôme entier en k, pair, réciproque et du degré $2n$. Les premiers coefficients sont

$$3a_1 = \alpha k,$$
$$5a_2 = \frac{3\alpha^2-1}{1.2}k^2,$$
$$7a_3 = \frac{15\alpha^3-9\alpha}{1.2.3}k^3,$$
$$9a_4 = \frac{105\alpha^4-90\alpha^2+9}{1.2.3.4}k^4,$$
$$11a_5 = \frac{945\alpha^5-1050\alpha^3+225\alpha}{1.2.3.4.5}k^5,$$
$$13a_6 = \frac{10395\alpha^6-14175\alpha^4+4725\alpha^2-225}{1.2.3.4.5.6}k^6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En remplaçant $k\alpha$ par $\frac{k^2+1}{2}$, on a

$$3a_1 = \frac{1+k^2}{2},$$
$$5a_2 = \frac{3+2k^2+3k^4}{2.4},$$
$$7a_3 = \frac{15+9k^2+9k^4+15k^6}{2.4.6},$$
$$9a_4 = \frac{105+60k^2+54k^4+60k^6+105k^8}{2.4.6.8},$$
$$11a_5 = \frac{945+525k^2+450k^4+450k^6+525k^8+945k^{10}}{2.4.6.8.10},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Du développement précédent on déduit celui de z^n, suivant les puissances de u. Si l'on pose

(4) $$z^n = u^n + a_1^{(n)}u^{n+2} + a_2^{(n)}u^{n+4} + \ldots,$$

on a, en effet,

$$(5) \qquad a_p^{(n)} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_u^{2p}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right]_{u=0},$$

$\frac{z}{u}$ étant une fonction de u, donnée par la série (2).

Développement des fonctions elliptiques.

281. Les fonctions $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, ayant les mêmes infinis, se développent en séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de z, et convergentes dans un même cercle, qui a pour rayon la distance de l'origine au pôle le plus voisin. Lorsque le multiplicateur g est égal à l'unité et le module k réel, positif et plus petit que 1, si l'on choisit les périodes comme nous l'avons expliqué aux nos 228 et 229, le rayon du cercle de convergence est $\frac{\omega'}{2i}$.

La fonction $\lambda(z)$ étant impaire, son développement est de la forme

$$(6) \qquad \lambda(z) = \frac{z}{1} - \mathfrak{A}_1 \frac{z^3}{1.2.3} + \mathfrak{A}_2 \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

De l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dz} = 1 - (1+k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

on déduit

$$\frac{d^2\lambda}{dz^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3,$$
$$\frac{d^3\lambda}{dz^3} = -(1+k^2-6k^2\lambda^2)\frac{d\lambda}{dz},$$
$$\frac{d^4\lambda}{dz^4} = -(1+k^2-6k^2\lambda^2)\frac{d^2\lambda}{dz^2} + 12k^2\lambda\frac{d\lambda}{dz},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

En faisant $\lambda = 0$, on obtient les valeurs des dérivées pour $z = 0$ et, par conséquent, les coefficients de la série. Ces coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. D'après sa définition par l'équation différentielle (n° 221), la fonction $\lambda(z)$ se réduit à $\sin z$, lorsque le module k est nul et le multiplicateur g égal à l'unité; il en résulte que les premiers termes de tous les polynômes, ordonnés par

rapport aux puissances croissantes de k, sont égaux à l'unité, ce qui est d'ailleurs évident par le calcul lui-même.

La relation

$$\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\lambda(z, k),$$

établie au n° 234, fait voir que le polynôme $\mathfrak{A}_n$ satisfait à la relation

$$(7) \qquad \mathfrak{A}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{A}_n\left(\frac{1}{k}\right),$$

et, par conséquent, qu'il est de degré $2n$ et réciproque.

Nous remarquerons encore la propriété suivante : si l'on pose

$$x = \sqrt{2k}\,\lambda(z); \quad \zeta = z\sqrt{2k},$$

la série prend la forme

$$x = \zeta - \frac{\mathfrak{A}_1}{2k}\frac{\zeta^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{A}_2}{(2k)^2}\frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et l'équation différentielle devient

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = 1 - \alpha x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} = -\alpha x + \frac{1}{2}x^3,$$

$$\frac{d^3x}{d\zeta^3} = -\left(\alpha - \frac{3}{2}x^2\right)\frac{dx}{d\zeta},$$

$$\frac{d^4x}{d\zeta^4} = -\left(\alpha - \frac{3}{2}x^2\right)\frac{d^2x}{d\zeta^2} + 3x\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

les valeurs des dérivées successives, pour $x = 0$, étant des fonctions entières de α, à coefficients entiers, on en conclut que $\mathfrak{A}_n$ est égal au produit de $(2k)^n$ par une fonction entière de α, à coefficients entiers.

Du développement précédent on déduit celui de $\lambda^n(z)$, suivant les

puissances de z. Soit

$$(8)\qquad \lambda^n(z) = \mathfrak{A}_0^{(n)} \frac{z^n}{1.2\ldots n} - \mathfrak{A}_1^{(n)} \frac{z^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \mathfrak{A}_2^{(n)} \frac{z^{n+4}}{1.2\ldots(n+4)} + \ldots,$$

on a

$$(9)\qquad \mathfrak{A}_p^{(n)} = (-1)^p(2p+1)(2p+2)\ldots(2p+n)\left[D_z^{2p}\left(\frac{u}{z}\right)^n\right]_{z=0},$$

$\frac{u}{z}$ étant une fonction de z, donnée par la série (6).

La formule de Lagrange établit des relations entre les coefficients des séries (6) et (8) et ceux des séries inverses (2) et (4). D'une part, si l'on regarde u comme une fonction implicite de z, définie par l'équation

$$u = z\frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)},$$

dans laquelle $\frac{z}{u}$ désigne la fonction de u, donnée par la série (2), on a

$$(10)\qquad \mathfrak{A}_p = (-1)^p\left[D_u^{2p}\frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)^{2p+1}}\right]_{u=0},$$

$$(11)\qquad \mathfrak{A}_p^{(n)} = (-1)^p(2p+1)(2p+2)\ldots(2p+n-1)n\left[D_u^{2p}\frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)^{2p+n}}\right]_{u=0}.$$

D'autre part, si l'on regarde z comme une fonction implicite de u, définie par l'équation

$$z = u\frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)},$$

dans laquelle $\frac{u}{z}$ désigne la fonction de z, donnée par la série (6), on a

$$(12)\qquad a_p = \frac{1}{1.2\ldots(2p+1)}\left[D_z^{2p}\frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)^{2p+1}}\right]_{z=0},$$

$$(13)\qquad a_p^{(n)} = \frac{n}{2p+n}\,\frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_z^{2p}\frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)^{2p+n}}\right]_{z=0}.$$

282. Le développement de la fonction paire $\mu(z)$ est de la forme

$$(14) \qquad \mu(z) = 1 - \mathfrak{B}_1 \frac{z^2}{1.2} + \mathfrak{B}_2 \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

De l'équation différentielle (n° 159)

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = 1 - k^2 + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4$$

on déduit

$$\frac{d^2\mu}{dz^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

$$\frac{d^3\mu}{dz^3} = -[1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)]\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^4\mu}{dz^4} = -[1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)]\frac{d^2\mu}{dz^2} - 3(2k)^2\mu\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en faisant $\mu = 1$, on obtient les valeurs des dérivées successives pour $z = 0$ et, par conséquent, les coefficients de la série. Ces coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. La fonction $\mu(z)$ se réduisant à $\cos z$, lorsque le module k est nul, les premiers termes de tous ces polynômes, ordonnés par rapport aux puissances croissantes de k, sont égaux à l'unité.

Remarquons que les valeurs des premières dérivées sont des fonctions entières de $2k$, à coefficients entiers, et que la même propriété se continue, parce que la quantité $1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)$, qui entre dans l'expression de la seconde dérivée, se réduit à $1 + (2k)^2$ et sa dérivée à $3(2k)^2$, de sorte que, dans le calcul ultérieur, les coefficients de tous les termes, à partir du second, seront des fonctions entières de $2k$.

Le développement de la fonction paire $\nu(z)$ est de la même forme

$$(15) \qquad \nu(z) = 1 - \mathfrak{C}_1 \frac{z^2}{1.2} + \mathfrak{C}_2 \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots;$$

l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 = -(1 - k^2) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4$$

montre, comme précédemment, que les coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. La fonction $\nu(z)$ se réduisant à une constante, lorsque le module k est nul, les coefficients $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots$ s'annulent et, par conséquent, renferment k^2 en facteur commun.

La relation

$$\mu\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \nu(z, k),$$

démontrée au n° **234**, fait voir que les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ satisfont à la relation

$$(16) \qquad \mathfrak{C}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{B}_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

On en conclut que le polynôme $\mathfrak{C}_n(k)$ est du degré $2n$, et, comme il n'a pas de terme indépendant de k, que le polynôme $\mathfrak{B}_n(k)$ est du degré $2n-2$.

Méthode de M. Hermite.

283. Le calcul des coefficients par les dérivées successives est impraticable. M. Hermite a donné une méthode qui permet de trouver directement un coefficient quelconque $\mathfrak{B}_n$ du développement de $\mu(z)$ et qui n'exige que la résolution d'équations du premier degré. Cette méthode repose sur une formule que l'on peut établir de la manière suivante : considérons la fonction

$$\varphi(z) = A\frac{\lambda(z)\nu(z)}{\mu(z)},$$

qui admet les deux périodes ω et ω' et qui satisfait aux relations

$$\varphi\left(z + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = -\varphi(z),$$
$$\varphi\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)\varphi(z) = A^2.$$

La quantité $\frac{\omega+\omega'}{2}$ joue, dans les propriétés de cette fonction, le même

rôle que la quantité ω dans celles de la fonction proposée $\lambda(z)$. Déterminons la constante A, de manière que la fonction φ ait une valeur égale à l'unité pour $z = \frac{\omega + \omega'}{4}$. De la relation

$$\mu\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)\mu(z) = -\frac{ik'}{k} \quad (\text{n}^\circ\ 77),$$

on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega + \omega'}{4}\right) = \sqrt{\frac{-ik'}{k}},$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{\omega + \omega'}{k}\right) = \sqrt{\frac{k + ik'}{4}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{-ik'(k + ik')};$$

on fera donc

$$A = k - ik'.$$

De cette manière, la fonction $\varphi(z)$ est une fonction λ, admettant les périodes elliptiques $\omega + \omega'$, ω', au lieu de 2ω, ω'. Si l'on désigne par g_1 et k_1 le multiplicateur et le module de cette nouvelle fonction λ, on a

$$g_1 = A = k - ik', \quad k_1 = \frac{1}{A^2} = \frac{k + ik'}{k - ik'},$$

et l'on obtient ainsi la formule

$$(17) \qquad \lambda\left[(k - ik')z, \frac{k + ik'}{k - ik'}\right] = (k - ik')\frac{\lambda(z, k)\nu(z, k)}{\mu(z, k)}.$$

On en déduit

$$(18) \qquad \mu\left[(k - ik')z, \frac{k + ik'}{k - ik'}\right] = (k - ik')\frac{k\mu^2(z, k) + ik'}{\mu(z, k)},$$

et, en changeant le signe de i,

$$(19) \qquad \mu\left[(k + ik')z, \frac{k - ik'}{k + ik'}\right] = (k + ik')\frac{k\mu^2(z, k) - ik'}{\mu(z, k)};$$

la combinaison de ces deux relations donne

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &(k+ik')\mu\left[(k-ik')z,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]\\ &+(k-ik')\mu\left[(k+ik')z,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]=2k\mu(z,k). \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $k=\cos\gamma$, cette dernière équation prend la forme

$$(21)\quad e^{\gamma i}\mu(ze^{-\gamma i}, e^{2\gamma i})+e^{-\gamma i}\mu(ze^{\gamma i}, e^{-2\gamma i})=2\cos\gamma\,\mu(z,\cos\gamma).$$

En remplaçant les fonctions μ par leurs développements en séries, on reconnaît que le polynôme $\mathfrak{B}_n(k)$, pair et du degré $2n-2$, satisfait à la relation

$$(22)\quad e^{(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{-2\gamma i})+e^{-(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{2\gamma i})=2\cos\gamma\,\mathfrak{B}_n(\cos\gamma).$$

Soit

$$(23)\quad \mathfrak{B}_n(k)=b_0+b_1(2k)^2+b_2(2k)^4+\ldots+b_{n-1}(2k)^{2n-2},$$

la relation précédente devient

$$(24)\quad \sum_{q=0}^{q=n-1}2^{2q}b_q\cos(2n-4q-1)\gamma=\sum_{p=0}^{p=n-1}2^{2p}b_p\cos^{2p+1}\gamma.$$

Si l'on remplace les puissances de $\cos\gamma$ par leurs expressions en fonction des cosinus des multiples de l'arc γ, expressions données par la formule

$$2^{2p}\cos^{2p+1}\gamma=\cos(2p+1)\gamma+\frac{2p+1}{1}\cos(2p-1)\gamma$$
$$+\frac{(2p+1)2p}{1.2}\cos(2p-3)\gamma+\ldots+\frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots p}\cos\gamma,$$

et, si l'on ordonne le second membre par rapport à ces cosinus, on la transforme en la suivante :

$$(25)\quad \sum_{q=0}^{q=n-1} 2^{2q} b_q \cos(2n-4q-1)\gamma = \sum_{p=0}^{p=n-1} \left[b_p + \frac{2p+3}{1} b_{p+1} \right.$$
$$\left. + \frac{(2p+5)(2p+4)}{1.2} b_{p+2} + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+p+1)}{1.2\ldots(n-p-1)} b_{n-1} \right] \cos(2p+1)\gamma,$$

Cette égalité devant avoir lieu, quel que soit γ, les coefficients des mêmes cosinus dans les deux membres doivent être égaux entre eux. A une valeur donnée de p correspond pour q l'une des deux valeurs $\frac{n-p-1}{2}$, $\frac{n+p}{2}$, suivant que le nombre $2n-4q-1$ est positif ou négatif; on a donc

$$(26)\quad 2^{n-p-1} b_{\frac{n-p-1}{2}} \quad \text{ou} \quad 2^{n+p} b_{\frac{n+p}{2}} = b_p + \frac{2p+3}{1} b_{p+1}$$
$$+ \frac{(2p+5)(2p+4)}{1.2} b_{p+2} + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+p+1)}{1.2\ldots(n-p-1)} b_{n-1}.$$

En attribuant à p les n valeurs décroissantes $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4, \ldots$, 0, on obtient ainsi un système de n équations linéaires et homogènes

$$b_0 = b_{n-1},$$
$$2^{2n-2} b_{n-1} = b_{n-2} + \frac{2n-1}{1} b_{n-1},$$
$$2^2 b_1 = b_{n-3} + \frac{2n-3}{1} b_{n-2} + \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} b_{n-1},$$
$$2^{2n-4} b_{n-2} = b_{n-4} + \frac{2n-5}{1} b_{n-3} + \frac{(2n-3)(2n-4)}{1.2} b_{n-2} + \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3} b_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left.\begin{matrix} 2^{n-1} b_{\frac{n-1}{2}} \\ 2^n b_{\frac{n}{2}} \end{matrix}\right\} = b_0 + \frac{3}{1} b_1 + \frac{5.4}{1.2} b_2 + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} b_{n-1},$$

entre les n nombres entiers cherchés b_0, b_1, $b_2, \ldots$, b_{n-1}; mais ces

équations se réduisent à $n-1$ équations distinctes ; car, en les ajoutant membre à membre, on a la même identité qu'en faisant $\gamma = 0$ dans l'équation (21). On connaît le premier coefficient $b_0 = 1$; le système des $n-1$ équations linéaires permettra de déterminer les autres. Remarquons que le dernier coefficient b_{n-1} est aussi égal à 1.

284. Appliquons cette méthode au cas où $n=7$; nous aurons à résoudre les cinq équations

$$2^{12} = b_5 + \frac{13}{1},$$

$$2^2 b_1 = b_4 + \frac{11}{1} b_5 + \frac{13.12}{1.2},$$

$$2^{10} b_5 = b_3 + \frac{9}{1} b_4 + \frac{11.10}{1.2} b_5 + \frac{13.12.11}{1.2.3},$$

$$2^4 b_2 = b_2 + \frac{7}{1} b_3 + \frac{9.8}{1.2} b_4 + \frac{11.10.9}{1.2.3} b_5 + \frac{13.12.11.10}{1.2.3.4},$$

$$2^8 b_4 = b_1 + \frac{5}{1} b_2 + \frac{7.6}{1.2} b_3 + \frac{9.8.7}{1.2.3} b_4 + \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} b_5 + \frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5}.$$

On en déduit

$$b_1 = 74733, \quad b_2 = 1434066, \quad b_3 = 1670672, \quad b_4 = 253941, \quad b_5 = 4083.$$

Voici les premiers coefficients du développement de $\mu(z)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= 1,\\
\mathfrak{B}_2 &= 1 + (2k)^2,\\
\mathfrak{B}_3 &= 1 + 11(2k)^2 + (2k)^4,\\
\mathfrak{B}_4 &= 1 + 102(2k)^2 + 57(2k)^4 + (2k)^6,\\
\mathfrak{B}_5 &= 1 + 922(2k)^2 + 1923(2k)^4 + 247(2k)^6 + (2k)^8,\\
\mathfrak{B}_6 &= 1 + 8303(2k)^2 + 54415(2k)^4 + 24040(2k)^6 + 1013(2k)^8 + (2k)^{10},\\
\mathfrak{B}_7 &= 1 + 74733(2k)^2 + 1434066(2k)^4 + 1670672(2k)^6 + 253941(2k)^8\\
&\quad + 4083(2k)^{10} + (2k)^{12},\\
\mathfrak{B}_8 &= 1 + 672604(2k)^2 + 36644374(2k)^4 + 99026018(2k)^6 + 38517533(2k)^8\\
&\quad + 2477514(2k)^{10} + 16369(2k)^{12} + (2k)^{14},
\end{aligned}$$

. . . .

On en déduit immédiatement, d'après la relation (16), ceux du développement de $\nu(z)$

$$\mathfrak{C}_1 = k^2,$$
$$\mathfrak{C}_2 = k^2(k^2 + 2^2),$$
$$\mathfrak{C}_3 = k^2(k^4 + 11.2^2k^2 + 2^4),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Une fois que l'on connaît les développements de $\mu(z)$ et de $\nu(z)$, on obtient aisément celui de $\lambda(z)$; car la relation $\lambda'(z) = \mu(z)\nu(z)$ donne

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\mathfrak{B}_{n-1}\mathfrak{C}_1 + \frac{2n(2n-1(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\mathfrak{B}_{n-2}\mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_n;$$

en groupant les termes deux à deux, on a un polynôme en k, réciproque et du degré $2n$. On trouve ainsi

$$\mathfrak{A}_1 = 1 + k^2,$$
$$\mathfrak{A}_2 = (1 + k^4) + 14k^2,$$
$$\mathfrak{A}_3 = (1 + k^6) + 135k^2(1 + k^2),$$
$$\mathfrak{A}_4 = (1 + k^8) + 1228k^2(1 + k^4) + 5478k^4,$$
$$\mathfrak{A}_5 = (1 + k^{10}) + 11\,069k^2(1 + k^6) + 165826k^4(1 + k^2),$$
$$\mathfrak{A}_6 = (1 + k^{12}) + 99642k^2(1 + k^8) + 4494351k^4(1 + k^4) + 13\,180\,268k^6,$$
$$\mathfrak{A}_7 = (1 + k^{14}) + 896803k^2(1 + k^{10}) + 116\,294\,673k^4(1 + k^6) + 834\,687\,179k^6(1 + k^2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces coefficients, exprimés à l'aide de la quantité α, comme on l'a dit au n° **281**, prennent la forme plus simple

$$\mathfrak{A}_1 = (2k)\alpha,$$
$$\mathfrak{A}_2 = (2k)^2(\alpha^2 + 3),$$
$$\mathfrak{A}_3 = (2k)^3(\alpha^3 + 33\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_4 = (2k)^4(\alpha^4 + 306\alpha^2 + 189),$$
$$\mathfrak{A}_5 = (2k)^5(\alpha^5 + 2766\alpha^3 + 8289\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_6 = (2k)^6(\alpha^6 + 24909\alpha^4 + 255987\alpha^2 + 68607),$$
$$\mathfrak{A}_7 = (2k)^7(\alpha^7 + 224\,199\alpha^5 + 6988\,167\alpha^3 + 7660737\alpha),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En multipliant par lui-même le développement de $\lambda(z)$, on obtient celui de $\lambda^2(z)$, que nous avons représenté par

$$(27) \qquad \lambda^2(z) = \mathfrak{A}_0^{(2)} \frac{z^2}{1.2} - \mathfrak{A}_1^{(2)} \frac{z^4}{1.2.3.4} + \mathfrak{A}_2^{(2)} \frac{z^6}{1.2\ldots6} - \ldots.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0^{(2)} &= 2, \\
\mathfrak{A}_1^{(2)} &= 2^4 k\alpha, \\
\mathfrak{A}_2^{(2)} &= 2^4 k^2(2^3\alpha^2 + 9), \\
\mathfrak{A}_3^{(2)} &= 2^8 k^3(2^2\alpha^3 + 27\alpha), \\
\mathfrak{A}_4^{(2)} &= 2^9 k^4(2^4\alpha^4 + 486\alpha^2 + 189), \\
\mathfrak{A}_5^{(2)} &= 2^{12} k^5(2^4\alpha^5 + 2016\alpha^3 + 3429\alpha), \\
\mathfrak{A}_6^{(2)} &= 2^{11} k^6(2^8\alpha^6 + 130\,464\alpha^4 + 667\,872\alpha^2 + 130977), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La fonction $\lambda^2(z)$ se réduisant à $\sin^2 z$ ou à $\frac{1-\cos 2z}{2}$, lorsque le module k devient nul et, par suite, $k\alpha$ égal à $\frac{1}{2}$, le coefficient du premier terme de $\mathfrak{A}_p^{(2)}$ est 2^{3p+1}.

Expression de $\lambda^{2n+1}(z)$ en fonction de $\lambda(z)$ et de ses dérivées.

285. Nous avons vu (n° **166**) qu'une puissance impaire de $\lambda(z)$ est égale à une fonction linéaire de $\lambda(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs, et que si l'on pose

$$\frac{1}{\lambda^{2n+1}(z)} = \frac{1}{z^{2n+1}} + \frac{A_{2n-1}}{z^{2n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z} + \ldots,$$

le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, on a

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} k^{2n}\lambda^{2n+1}(z) = {} & A_1\lambda(z) + \frac{A_3}{1.2}\lambda''(z) + \ldots \\ & + \frac{A_{2n-1}}{1.2\ldots(2n-2)}\lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2\ldots2n}\lambda^{(2n)}(z). \end{aligned} \right.$$

On peut exprimer les coefficients A_1, $A_3, \ldots$ au moyen des coef-

ficients $a_p^{(n)}$ considérés au n° **280**. On a, en effet,

$$\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1} = 1 + A_{2n-1}z^2 + A_{2n-3}z^4 + \ldots + A_1 z^{2n} + \ldots;$$

d'où

$$A_{2n+1-2p} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_z^{2p}\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1}\right]_{z=0}.$$

Mais, si dans la formule (13) on remplace n par $2n-2p+1$, on a

$$a_p^{(2n+1-2p)} = \frac{2n-2p+1}{2n+1}\,\frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_z^{2p}\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1}\right]_{z=0};$$

on en déduit

$$(29)\qquad A_{2n+1-2p} = \frac{2n+1}{2n+1-2p}\,a_p^{(2n+1-2p)},$$

et l'équation (28) devient

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{k^{2n}\lambda^{2n+1}(z)}{2n+1} &= \frac{a_n}{1}\lambda(z) + \frac{a_{n-1}^{(3)}}{1.2.3}\lambda''(z) + \ldots \\ &+ \frac{a_1^{(2n-1)}}{1.2\ldots(2n-1)}\lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)}\lambda^{(2n)}(z). \end{aligned}\right.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega'}{2}$, on a l'expression de $\frac{1}{\lambda^{2n+1}(z)}$ par une fonction linéaire de $\lambda\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$ et de ses dérivées.

Expression de $\lambda^{2n}(z)$ en fonction de $\lambda^2(z)$ et de ses dérivées.

286. Nous avons vu (n° **167**) qu'une puissance paire de $\lambda(z)$ est égale à une fonction linéaire de $\lambda^2(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs, et que, si l'on pose

$$\frac{1}{\lambda^{2n}(z)} = \frac{1}{z^{2n}} + \frac{A_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \ldots + \frac{A_2}{z^2} + \ldots,$$

on a

$$(31)\quad k^{2n-2}D\lambda^{2n}(z) = \frac{A_2}{1}D\lambda^2(z) + \frac{A_4}{1.2.3}D^3\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}D^{2n-1}\lambda^2(z).$$

Les coefficients A_2, A_4,... s'expriment aussi par les coefficients $a_p^{(n)}$; on a

(32) $$A_{2n-2p} = \frac{2n}{2n-2p} a_p^{(2n-2p)},$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{k^{2n-2} D\lambda^{2n}(z)}{2n} = \frac{a_{n-1}^{(2)}}{1.2} D\lambda^2(z) + \frac{a_{n-2}^{(4)}}{1.2.3.4} D^3\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots 2n} D^{2n-1}\lambda^2(z).$$

Si l'on intègre de o à z, en observant que, d'après la série (27), la valeur de $D^{2p}\lambda^2(z)$, pour $z = 0$, est égale à $(-1)^{p-1}\mathfrak{A}_{p-1}^{(2)}$, on a finalement

(33) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{k^{2n-2}\lambda^{2n}(z)}{2n} &= \frac{a_{n-1}^{(2)}}{1.2}\lambda^2(z) + \frac{a_{n-2}^{(4)}}{1.2.3.4} D^2\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots 2n} D^{2n-2}\lambda^2(z) \\ &\quad - \left[\frac{a_{n-2}^{(4)}\mathfrak{A}_0^{(2)}}{1.2.3.4} - \frac{a_{n-3}^{(6)}\mathfrak{A}_1^{(2)}}{1.2\ldots 6} + \ldots + (-1)^n \frac{\mathfrak{A}_{n-2}^{(2)}}{1.2\ldots 2n}\right]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant z par $z + \frac{\omega'}{2}$, on a l'expression de $\frac{1}{\lambda^{2n}(z)}$ par une fonction linéaire de $\lambda^2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$ et de ses dérivées.

Fonctions de M. Weierstrass.

287. D'après les relations établies au n° 169, lorsque le multiplicateur g est égal à l'unité, les fonctions θ satisfont aux équations différentielles

(1) $$\left\{ \begin{aligned} &D^2 \log\theta(z) + k^2\lambda^2(z) = H, \quad D^2\log\theta_1(z) + \frac{1}{\lambda^2(z)} = H, \\ &D^2\log\theta_2(z) + \frac{\nu^2(z)}{\mu^2(z)} = H, \quad D^2\log\theta_3(z) + k^2\frac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)} = H, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles H désigne la constante $\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}$. On simplifie ces équations en substituant aux fonctions θ les fonctions Al (initiales du mot *alle*) de M. Weierstrass, fonctions définies par les formules

(2) $$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Al}(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta(z)}{\theta(0)}, \quad \mathrm{Al}_1(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_1(z)}{\theta'_1(0)}, \\ &\mathrm{Al}_2(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)}, \quad \mathrm{Al}_3(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)}. \end{aligned} \right.$$

En désignant par H la nouvelle constante $\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}$ égale à $\mathrm{H} + \frac{2\pi i}{\omega\omega'}$, on a aussi (n° 173)

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \dfrac{\vartheta(z)}{\vartheta(0)}, & \mathrm{Al}_1(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta'_1(0)}, \\ \mathrm{Al}_2(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)}, & \mathrm{Al}_3(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \dfrac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}. \end{cases}$$

Les trois fonctions $\mathrm{Al}(z)$, $\mathrm{Al}_2(z)$, $\mathrm{Al}_3(z)$ sont paires et se réduisent à l'unité pour $z = 0$; la fonction $\mathrm{Al}_1(z)$ est impaire et sa dérivée est égale à l'unité pour $z = 0$. Comme on a

$$(4)\quad \lambda(z) = \frac{\mathrm{Al}_1(z)}{\mathrm{Al}(z)}, \quad \mu(z) = \frac{\mathrm{Al}_2(z)}{\mathrm{Al}(z)}, \quad \nu(z) = \frac{\mathrm{Al}_3(z)}{\mathrm{Al}(z)},$$

les quatre fonctions Al satisfont aux relations

$$(5)\quad \mathrm{Al}_2^2 + \mathrm{Al}_1^2 = \mathrm{Al}_3^2 + k^2\mathrm{Al}_1^2 = \mathrm{Al}^2.$$

Les équations (1) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(z) + k^2\lambda^2(z) = 0, & \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}_1(z) + \dfrac{1}{\lambda^2(z)} = 0, \\ \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}_2(z) + \dfrac{\nu^2(z)}{\mu^2(z)} = 0, & \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}_3(z) + k^2 \dfrac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)} = 0; \end{cases}$$

on peut les mettre sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\dfrac{d^2\mathrm{Al}}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}_1^2 = 0, & \mathrm{Al}_1\dfrac{d^2\mathrm{Al}_1}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_1}{dz}\right)^2 + \mathrm{Al}^2 = 0, \\ \mathrm{Al}_2\dfrac{d^2\mathrm{Al}_2}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_2}{dz}\right)^2 + \mathrm{Al}_3^2 = 0, & \mathrm{Al}_3\dfrac{d^2\mathrm{Al}_3}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_3}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}_2^2 = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathrm{Al}(z)$, étant holomorphes, sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières de z, et convergentes pour toutes les valeurs de z. Nous représenterons ces séries par

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(z) = 1 - \mathfrak{a}^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_1(z) = z - \mathfrak{a}_1^{(1)}\dfrac{z^3}{1.2.3} + \mathfrak{a}_1^{(2)}\dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_2(z) = 1 - \mathfrak{a}_2^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}_2^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_3(z) = 1 - \mathfrak{a}_3^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}_3^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots. \end{cases}$$

On obtient les coefficients des deux dernières séries en différentiant plusieurs fois successivement les deux dernières des équations (7), faisant ensuite $z = 0$ et tenant compte des conditions initiales $\mathrm{Al}_2(0) = \mathrm{Al}_3(0) = 1$, $\mathrm{Al}'_2(0) = \mathrm{Al}'_3(0) = 0$; ceci montre que les coefficients a_2 et a_3 sont des polynômes entiers en k, pairs, et à coefficients entiers. La première des équations (7), mise sous la forme

$$\mathrm{Al}\frac{d^2\mathrm{Al}}{dz^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}^2 - k^2\mathrm{Al}_2^2 = 0,$$

et différentiée plusieurs fois successivement, donne les coefficients du développement de $\mathrm{Al}(z)$ à l'aide de ceux du développement de $\mathrm{Al}_2(z)$. De la relation $\mathrm{Al}_1(z) = \lambda(z)\mathrm{Al}(z)$, on déduira enfin ceux du développement de $\mathrm{Al}_1(z)$. Ces coefficients sont aussi des polynômes entiers en k, pairs, et à coefficients entiers. Les séries par lesquelles s'expriment les quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$ étant convergentes pour toutes les valeurs de z et de k, il en résulte que ces fonctions sont holomorphes, non-seulement par rapport à z, mais encore par rapport à k, pour toutes les valeurs de ces variables.

288. Les fonctions Al n'admettent aucune période, mais elles rentrent dans la catégorie des fonctions intermédiaires dont nous avons parlé dans le Chapitre III du Livre IV; quand on remplace z par $z + \omega$ ou par $z + \omega'$, elles sont multipliées par les quantités

$$\pm e^{-k^2\omega_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}, \quad \pm e^{-k^2\omega'_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

ω_1 et ω'_1 étant les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce données par les formules (14) du n° 273.

D'après les formules du n° 201, lorsque le module k est nul, la première période ω devient égale à π, la seconde ω' infinie, et la quantité q est nulle; les deux fonctions $\mathrm{Al}(z)$ et $\mathrm{Al}_3(z)$ se réduisent à l'unité, la fonction $\mathrm{Al}_1(z)$ à $\sin z$, la fonction $\mathrm{Al}_2(z)$ à $\cos z$.

D'après leur définition (n°s 73 et 173), les fonctions θ et ϑ sont homogènes et du degré zéro par rapport aux trois quantités z, ω, ω' qu'elles renferment; elles ne changent pas lorsqu'on multiplie ces trois quantités par une même quantité, et, par conséquent, les fonctions $\theta(z, g, k)$, $\vartheta(z, g, k)$ s'expriment à l'aide de fonctions dont le multiplicateur est

égal à l'unité; elles sont respectivement égales aux fonctions $\theta(gz, k)$, $\vartheta(gz, k)$. Nous avons trouvé (n° 234) les relations qui existent entre les fonctions θ ou les fonctions ϑ relatives à deux modules réciproques; des relations (35),

$$\frac{\vartheta_3\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\vartheta_2(z, k)} = \frac{\vartheta_2\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\vartheta_3(z, k)} = \frac{\vartheta\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{i}\,\vartheta(z, k)} = \frac{\vartheta_1\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{i}\,\vartheta(z, k)} = 1,$$

on déduit les relations

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(z, k), & \mathrm{Al}_1\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{Al}_1(z, k), \\ \mathrm{Al}_2\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}_3(z, k), & \mathrm{Al}_3\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}_2(z, k), \end{cases}$$

entre les fonctions Al relatives à deux modules réciproques.

On conclut de là que les coefficients des séries satisfont aux relations

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), & \mathfrak{a}_1^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_1^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), \\ \mathfrak{a}_3^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_2^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), & \mathfrak{a}_2^{(n)} = k^{2n}\mathfrak{a}_3^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

Il en résulte que les polynômes $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_1^{(n)}$ sont réciproques par rapport à k, et que les polynômes $\mathfrak{a}_2^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ se déduisent l'un de l'autre. Les polynômes $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ s'annulant pour $k = 0$ et les deux autres se réduisant à l'unité, $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_2^{(n)}$ sont du degré $2n - 2$, $\mathfrak{a}_1^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ du degré $2n$.

En éliminant $\lambda(z)$ entre la première des équations (6) et l'équation

$$\lambda'^2(z) = [1 - \lambda^2(z)][1 - k^2\lambda^2(z)],$$

on arrive à l'équation différentielle du troisième ordre

$$(11)\quad [D^3 \log \mathrm{Al}(z)]^2 + 4 D^2 \log \mathrm{Al}(z)[1 + D^2 \log \mathrm{Al}(z)][k^2 + D^2 \log \mathrm{Al}(z)] = 0.$$

Quand on remplace z par l'une des quantités $z + \frac{\omega}{2}$, $z + \frac{\omega'}{2}$, $z + \frac{\omega + \omega'}{2}$, la fonction $D^2 \log \mathrm{Al}(z)$ se change en $D^2 \log \mathrm{Al}_3(z)$, $D^2 \log \mathrm{Al}_1(z)$,

$D^2 \log \mathrm{Al}_2(z)$; il en résulte que les quatre fonctions $\log \mathrm{Al}(z)$ satisfont à cette même équation différentielle.

289. On abrége le calcul des séries à l'aide d'équations aux différentielles partielles, auxquelles satisfont les fonctions holomorphes $\mathrm{Al}(z)$ des deux variables z et k. Considérons d'abord les fonctions θ, représentées par les formules (8) du n° **74**; le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, la période ω, donnée par la formule (31) du n° **205**, est une fonction de q; les fonctions θ dépendent donc uniquement des deux quantités z et q. De l'expression

$$\theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

on déduit

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{4\pi}{\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n q^{n^2} \sin\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{\omega^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n^2 q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial \log q} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n n^2 q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega} + \frac{4\pi z}{\omega}\frac{d\log\omega}{d\log q}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n n q^{n^2}\sin\frac{2n\pi z}{\omega};$$

d'où

$$(12) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q}\, z\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

En répétant le même calcul, on reconnaît que les trois autres fonctions θ satisfont à cette même équation aux différentielles partielles. Des formules (33) et (34) du n° **279** on tire

$$d\log\omega = \frac{k^2 - \mathrm{H}}{kk'^2}\, dk,$$

$$d\log q = \pi i\, d\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{2\pi^2}{kk'^2\omega^2}\, dk,$$

et l'équation (12) devient

$$(13) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + 2(k^2 - \mathrm{H})z\frac{\partial\theta}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial\theta}{\partial k} = 0.$$

290. Remplaçons maintenant la fonction θ par sa valeur

$$\theta(z) = \theta(o) e^{\frac{Hz^2}{2}} \mathrm{Al}(z);$$

l'équation se transforme en la suivante :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{Al}}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k} + \left(2k^2 \mathrm{H} - \mathrm{H}^2 + kk'^2 \frac{d\mathrm{H}}{dk}\right) z^2 \mathrm{Al} \\ &\qquad + \left[\mathrm{H} + 2kk'^2 \frac{d \log \theta(o)}{dk}\right] \mathrm{Al} = o. \end{aligned} \right.$$

De la relation

$$\mathrm{H} = k^2 - \frac{kk'^2}{\omega} \frac{d\omega}{dk},$$

on déduit

$$\frac{d\mathrm{H}}{dk} = 2k - \frac{1}{\omega} \frac{d\left(kk'^2 \frac{d\omega}{dk}\right)}{dk} + \frac{kk'^2}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2,$$

et, en vertu de l'équation (32) du n° **279**,

$$\frac{d\mathrm{H}}{dk} = k + kk'^2 \left(\frac{d \log \omega}{dk}\right)^2 = \frac{k^2 - 2k^2 \mathrm{H} + \mathrm{H}^2}{kk'^2}.$$

Le coefficient du quatrième terme de l'équation (14) se réduit ainsi à k^2. L'équation (13) est la même pour les quatre fonctions θ; les équations analogues à l'équation (14), et qui se rapportent aux quatre fonctions Al, ne diffèrent que par le coefficient du dernier terme; il suffit de remplacer dans ce coefficient $\theta(o)$ par l'une des quantités $\theta'_1(o)$, $\theta_2(o)$, $\theta_3(o)$. Des relations

$$\theta(o) = \sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}, \quad \theta'_1(o) = \sqrt{\frac{\omega k k'}{\pi}}, \quad \theta_2(o) = \sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}, \quad \theta_3(o) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}},$$

établies au n° **205**, on déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= -2kk'^2 \frac{d \log \theta(o)}{dk} = k'^2 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta'_1(o)}{dk} \\ &= 1 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta_2(o)}{dk} = k^2 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta_3(o)}{dk}, \end{aligned}$$

et l'on obtient les quatre équations

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}}{\partial z^2} + 2k^2 z \dfrac{\partial \mathrm{Al}}{\partial z} + 2kk'^2 \dfrac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k} + k^2 z^2 \mathrm{Al} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}_1}{\partial z^2} + 2k^2 z \dfrac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial z} + 2kk'^2 \dfrac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2 z^2)\mathrm{Al}_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}_2}{\partial z^2} + 2k^2 z \dfrac{\partial \mathrm{Al}_2}{\partial z} + 2kk'^2 \dfrac{\partial \mathrm{Al}_2}{\partial k} + (1 + k^2 z^2)\mathrm{Al}_2 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Al}_3}{\partial z^2} + 2k^2 z \dfrac{\partial \mathrm{Al}_3}{\partial z} + 2kk'^2 \dfrac{\partial \mathrm{Al}_3}{\partial k} + (k^2 + k^2 z^2)\mathrm{Al}_3 = 0, \end{cases}$$

qui sont dues à M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, 1856).

Il est aisé de reconnaître que les quatre fonctions Al, $\sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1$, $\sqrt{\dfrac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2$, $\dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3$ satisfont à la même équation

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial u}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial u}{\partial k} + k^2 z^2 u = 0.$$

291. Les équations (15) permettent d'exprimer un coefficient quelconque de l'une des séries à l'aide des deux coefficients précédents. Calculons d'abord le développement de Al (z); en substituant la série dans la première des équations (15) et égalant à zéro le coefficient de z^{2m}, on obtient la relation

$$(17)\qquad \mathfrak{a}^{(n+1)} = 4nk^2\mathfrak{a}^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}^{(n)}}{dk} - 2n(2n-1)k^2\mathfrak{a}^{(n-1)}.$$

Le premier coefficient est égal à l'unité; en faisant $n = 0$, on trouve $\mathfrak{a}^{(1)} = 0$; en faisant $n = 1$, on trouve $\mathfrak{a}^{(2)} = -2k^2$, et ainsi de suite. Les polynômes étant réciproques, on abrége le calcul en posant $\mathfrak{a}^{(n)} = k^n \mathfrak{b}^{(n)}$, $k + \dfrac{1}{k} = \beta$; la relation précédente devient

$$(18)\qquad \mathfrak{b}^{(n+1)} = 2n\beta\mathfrak{b}^{(n)} - 2(\beta^2 - 4)\frac{d\mathfrak{b}^{(n)}}{d\beta} - 2n(2n-1)\mathfrak{b}^{(n-1)},$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}^{(1)} &= 0,\\
\mathfrak{b}^{(2)} &= -2,\\
\mathfrak{b}^{(3)} &= -2^3\beta,\\
\mathfrak{b}^{(4)} &= -2^2(2^3\beta^2+1),\\
\mathfrak{b}^{(5)} &= -2^5(2^2\beta^3+3\beta),\\
\mathfrak{b}^{(6)} &= -2^3(2^6\beta^4+2^3.15\beta^2+51),\\
\mathfrak{b}^{(7)} &= -2^5(2^6\beta^5+2^5.7\beta^3+237\beta),\\
\mathfrak{b}^{(8)} &= -2^4(2^9\beta^6+2^6.45\beta^4+2^4.345\beta^2-849),\\
\mathfrak{b}^{(9)} &= -2^6(2^7\beta^7+2^5.33\beta^5+2^7.795\beta^3-2439\beta),\\
\mathfrak{b}^{(10)} &= -2^5(2^{12}\beta^8+2^9.91\beta^6+2^6.3165\beta^4-2^4.34137\beta^2-26199),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En considérant les premiers coefficients, on remarque que $\mathfrak{b}^{(2n'-1)}$ et $\mathfrak{b}^{(2n')}$ sont divisibles respectivement par $2^{n'+1}$ et par $2^{n'}$; la relation (18) montre que cette propriété est générale.

Si l'on remplace β par sa valeur $k+\frac{1}{k}$, on a

$$\begin{aligned}
-\mathfrak{a}^{(1)} &= 0\\
-\mathfrak{a}^{(2)} &= 2k^2,\\
-\mathfrak{a}^{(3)} &= 8(k^2+k^4),\\
-\mathfrak{a}^{(4)} &= 32(k^2+k^6)+68k^4,\\
-\mathfrak{a}^{(5)} &= 128(k^2+k^8)+480(k^4+k^6),\\
-\mathfrak{a}^{(6)} &= 512(k^2+k^{10})+3008(k^4+k^8)+5400k^6,\\
-\mathfrak{a}^{(7)} &= 2048(k^2+k^{12})+17408(k^4+k^{10})+49568(k^6+k^8),\\
-\mathfrak{a}^{(8)} &= 8192(k^2+k^{14})+95232(k^4+k^{12})+395520(k^6+k^{10})+603376k^8,\\
-\mathfrak{a}^{(9)} &= 32768(k^2+k^{16})+499712(k^4+k^{14})+2853888(k^6+k^{12})\\
&\quad+5668096(k^8+k^{10}),\\
-\mathfrak{a}^{(10)} &= 131072(k^2+k^{18})+2539520(k^4+k^{16})+19097600(k^6+k^{14})\\
&\quad+38153728(k^8+k^{12})+42090784k^{10},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les coefficients du développement de $\mathrm{Al}_1(z)$ sont donnés par la relation

$$(19)\quad \mathfrak{a}_1^{(n+1)} = [1+(4n+1)k^2]\mathfrak{a}_1^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}_1^{(n)}}{dk} - 2n(2n+1)k^2\mathfrak{a}_1^{(n-1)};$$

ces coefficients étant aussi réciproques, on posera, comme précédemment,

$$\mathfrak{a}_1^{(n)} = k^n \mathfrak{b}_1^{(n)},$$

ce qui met la relation sous la forme

$$\mathfrak{b}_1^{(n+1)} = (2n+1)\beta\mathfrak{b}_1^{(n)} - 2(\beta^2-4)\frac{d\mathfrak{b}_1^{(n)}}{d\beta} - 2n(2n+1)\mathfrak{b}_1^{(n-1)}. \tag{20}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_1^{(1)} &= \beta,\\
\mathfrak{b}_1^{(2)} &= \beta^2 + 2,\\
\mathfrak{b}_1^{(3)} &= \beta^3 + 2.3\beta,\\
\mathfrak{b}_1^{(4)} &= \beta^4 + 2^2.3\beta^2 - 2^2.9,\\
\mathfrak{b}_1^{(5)} &= \beta^5 + 2^2.5\beta^3 - 2^2.141\beta,\\
\mathfrak{b}_1^{(6)} &= \beta^6 + 2.15\beta^4 - 2^2.1479\beta^2 - 2^3.69,\\
\mathfrak{b}_1^{(7)} &= \beta^7 + 2.21\beta^5 - 2^2.13851\beta^3 - 2^3.1731\beta,\\
\mathfrak{b}_1^{(8)} &= \beta^8 + 2^3.7\beta^6 - 2^3.62907\beta^4 - 2^5.8355\beta^2 + 2^4.321,\\
\mathfrak{b}_1^{(9)} &= \beta^9 + 2^3.9\beta^7 - 2^3.567255\beta^5 - 2^5.140937\beta^3 - 2^4.26487\beta,\\
\mathfrak{b}_1^{(10)} &= \beta^{10} + 2.45\beta^8 - 2^3.5107185\beta^6 - 2^4.4252365\beta^4 - 2^4.1500435\beta^2 - 2^5.160839,
\end{aligned}$$

. . . .

ou, en remplaçant β par sa valeur,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1^{(1)} &= 1 + k^2,\\
\mathfrak{a}_1^{(2)} &= 1 + k^4 + 4k^2,\\
\mathfrak{a}_1^{(3)} &= 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4),\\
\mathfrak{a}_1^{(4)} &= 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4,\\
\mathfrak{a}_1^{(5)} &= 1 + k^{10} + 25(k^2 + k^8) - 494(k^4 + k^6),\\
\mathfrak{a}_1^{(6)} &= 1 + k^{12} + 36(k^2 + k^{10}) - 5781(k^4 + k^8) - 12184k^6,\\
\mathfrak{a}_1^{(7)} &= 1 + k^{14} + 49(k^2 + k^{12}) - 55173(k^4 + k^{10}) - 179605(k^6 + k^8),\\
\mathfrak{a}_1^{(8)} &= 1 + k^{16} + 64(k^2 + k^{14}) - 502892(k^4 + k^{12}) - 2279488(k^6 + k^{10})\\
&\quad - 3547930k^8,\\
\mathfrak{a}_1^{(9)} &= 1 + k^{18} + 81(k^2 + k^{16}) - 4537500(k^4 + k^{14}) - 27198588(k^6 + k^{12}),\\
&\quad - 59331498(k^8 + k^{10}),\\
\mathfrak{a}_1^{(10)} &= 1 + k^{20} + 100(k^2 + k^{18}) - 40856715(k^4 + k^{16}) - 313180080(k^6 + k^{14})\\
&\quad - 909015270(k^8 + k^{12}) - 1278530856k^{10},
\end{aligned}$$

. . . .

On calculera le développement de $\mathrm{Al}_2(z)$ au moyen de la relation

$$(21)\qquad \mathfrak{a}_2^{(n+1)} = (1 + 4nk^2)\,\mathfrak{a}_2^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}_2^{(n)}}{dk} - 2n(2n-1)k^2\mathfrak{a}_2^{(n-1)},$$

et l'on abrégerait un peu le calcul en posant $2k^2 = h$, et remarquant que les coefficients sont des polynômes en h à coefficients entiers. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_2^{(1)} &= 1,\\
\mathfrak{a}_2^{(2)} &= 1 + 2k^2,\\
\mathfrak{a}_2^{(3)} &= 1 + 6k^2 + 8k^4,\\
\mathfrak{a}_2^{(4)} &= 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6,\\
\mathfrak{a}_2^{(5)} &= 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8,\\
\mathfrak{a}_2^{(6)} &= 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10},\\
\mathfrak{a}_2^{(7)} &= 1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12},\\
\mathfrak{a}_2^{(8)} &= 1 + 56k^2 + 169320k^4 + 628064k^6 + 757264k^8 + 370944k^{10} + 93144k^{12},\\
&\quad + 8192k^{14},\\
\mathfrak{a}_2^{(9)} &= 1 + 72k^2 + 1515368k^4 + 7594592k^6 + 12998928k^8 + 9100288k^{10},\\
&\quad + 2725883k^{12} + 491520k^{14} + 32768k^{16},\\
\mathfrak{a}_2^{(10)} &= 1 + 90k^2 + 13623480k^4 + 89348080k^6 + 211064400k^8 + 219361824k^{10}\\
&\quad + 100242944k^{12} + 18450432k^{14} + 2506752k^{16} + 131072k^{18},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le développement de $\mathrm{Al}_3(z)$ se déduit de celui de $\mathrm{Al}_2(z)$, en vertu de la relation $\mathfrak{a}_3^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_2^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right)$; on a ainsi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_3^{(1)} &= k^2,\\
\mathfrak{a}_3^{(2)} &= 2k^2 + k^4,\\
\mathfrak{a}_3^{(3)} &= 8k^2 + 6k^4 + k^6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On obtient une vérification très-simple des calculs précédents en remarquant que, si le module k est égal à l'unité, la quantité p est nulle, et que les quatre fonctions Al deviennent respectivement

$$\mathrm{Al}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}\cosh z,\quad \mathrm{Al}_1(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}\sinh z,\quad \mathrm{Al}_2(z) = \mathrm{Al}_3(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

Développement de $\lambda(z)$.

292. D'après le théorème du n° 99, la fonction $\lambda(z)$, qui admet la période 2ω, est développable en une série de la forme

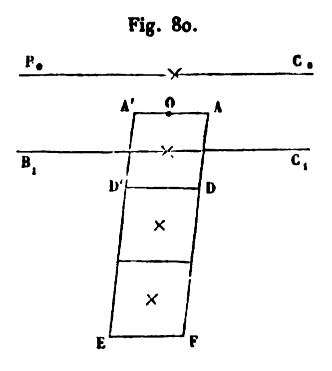
$$\lambda(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{m\pi z i}{\omega}},$$

et convergente dans une bande limitée par deux droites parallèles à la direction ω. On a posé $t = e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$; aux valeurs $z = \frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega'$, qui rendent la fonction $\lambda(z)$ infinie, correspondent les valeurs $t = \pm e^{\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{2\omega}}$, dont les modules varient en progression géométrique, et les arguments en progression arithmétique. Dans le plan sur lequel on figure la variable z, les pôles sont disposés par files parallèles à la direction ω. Dans le plan sur lequel on figure la variable t, les valeurs correspondantes de t sont marquées par des points placés sur deux spirales qui, d'une part, s'éloignent à l'infini, d'autre part se rapprochent indéfiniment de l'origine; ces points sont les pôles de la fonction λ, considérée comme une fonction de t. La série, ordonnée suivant les puissances entières de t, positives ou négatives, est convergente pour les valeurs de t comprises entre deux circonférences ayant pour centre l'origine et passant par les points $t = e^{\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{2\omega}}$, $t = e^{\frac{(2n-1)\pi\omega' i}{2\omega}}$; la série sera donc convergente pour les valeurs de z, comprises entre deux droites

parallèles à la direction ω et passant par les points $z=(2n+1)\frac{\omega'}{2}$, $z=(2n-1)\frac{\omega'}{2}$, c'est-à-dire entre deux files voisines.

Supposons $n=0$; la série sera convergente dans la bande comprise

Fig. 80.



entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1 à la direction ω, menées par les points $z=\frac{\omega'}{2}$, $z=-\frac{\omega'}{2}$ (*fig.* 80). Les coefficients de la série sont donnés par l'intégrale définie

$$A_m=\frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+2\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi zi}{\omega}}dz,$$

relative à une ligne située dans la bande. Nous remarquons d'abord que $A_{-m}=-A_m$; car, en posant $z=-z'$, on a

$$A_{-m}=\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\lambda(z)e^{\frac{m\pi zi}{\omega}}dz=-\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\lambda(z')e^{-\frac{m\pi z'i}{\omega}}dz'=-A_m.$$

Nous remarquons ensuite que

$$A_m=\frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi zi}{\omega}}dz+\frac{1}{2\omega}\int_{z_0+\omega}^{z_0+2\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi zi}{\omega}}dz,$$

et, en remplaçant z par $\omega+z$ dans la seconde partie,

$$A_m=\frac{1-(-1)^m}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi zi}{\omega}}dz.$$

Il en résulte que $A_{2m} = 0$ et que

$$A_{2m-1} = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \lambda(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}} dz.$$

Pour évaluer ce dernier coefficient, considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i} \int \lambda(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}} dz$$

relative au contour du parallélogramme A'EFA, dont les sommets A et A' correspondent à $z = \pm \frac{\omega}{2}$, et les sommets F et E à $z = \pm \frac{\omega}{2} - n'\omega'$; les parties relatives aux deux côtés opposés FA, A'E sont égales et de signes contraires; la partie relative au côté EF est infiniment petite, quand n' est très-grand; l'intégrale se réduit donc à la partie relative au côté AA', c'est-à-dire à $-\frac{\omega}{2\pi i} A_{2m-1}$. Mais l'intégrale définie relative au contour du parallélogramme est égale à la somme des résidus relatifs aux infinis $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$, n variant de 1 à n'. L'un de ces résidus étant égal à $\frac{1}{gk} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}}$, on a

$$A_{2m-1} = -\frac{2\pi i}{g\omega k} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}} = -\frac{2\pi i}{g\omega k} \frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}},$$

et la série devient

$$(1) \qquad \lambda(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}}{1-q^{2m-1}} \sin\frac{(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Développement de $\mu(z)$.

293. Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction $\mu(z)$, qui admet aussi la période 2ω et les mêmes infinis que $\lambda(z)$. En effectuant

le développement dans la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1, on aura

$$A_m = \frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+2\omega} \mu(z) e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}} dz.$$

Ici $A_{-m} = A_m$; on a d'ailleurs $A_{2m} = 0$ et

$$A_{2m-1} = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \mu(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}} dz.$$

On obtiendra le coefficient A_{2m-1}, comme précédemment, par la considération de l'intégrale définie relative au contour du parallélogramme A'EFA; le résidu relatif à l'un des infinis $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$ étant égal à $\frac{(-1)^{n-1} i}{gk} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}}$, on aura

$$A_{2m-1} = \frac{2\pi}{g\omega k}\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}} = \frac{2\pi}{g\omega k}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}};$$

d'où

$$\mu(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k}\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}}{1+q^{2m-1}} \cos\frac{(2m-1)\pi z}{\omega}. \tag{2}$$

Développement de $\nu(z)$.

294. Cette fonction admettant la période ω, la série sera de la forme

$$\nu(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}},$$

et, pour la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1, on aura

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \nu(z) e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}} dz.$$

On a ici $A_{-m} = A_m$. Pour évaluer le coefficient A_0, considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \nu(z)\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme A'D'DA (*fig.* 80), dont les sommets D et D' correspondent aux valeurs $z = \pm\frac{\omega}{2} - \omega'$; les parties relatives aux deux côtés A'D', DA étant égales et de signes contraires, celles relatives aux deux côtés D'D, AA' étant égales, l'intégrale relative au contour se réduit à deux fois l'intégrale relative au côté AA', c'est-à-dire à $-\frac{\omega}{\pi i}A_0$. Mais cette intégrale est égale au résidu relatif au pôle $-\frac{\omega'}{2}$, situé dans le parallélogramme; on en conclut que $A_0 = \frac{\pi}{g\omega}$.

On évaluera un autre coefficient A_m par la considération du parallélogramme A'EFA, comme précédemment, et l'on trouvera

$$A_m = \frac{2\pi}{g\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{(2n-1)m} = \frac{2\pi}{g\omega}\,\frac{q^m}{1+q^{2m}}.$$

On obtient ainsi la série

$$(3)\qquad \nu(z) = \frac{\pi}{g\omega}\left(1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos\frac{2m\pi z}{\omega}\right).$$

Développement des fonctions D $\log\theta(z)$.

295. La fonction méromorphe $D\log\theta(z) = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$ admet la période ω; elle devient infinie aux mêmes points que les fonctions elliptiques; elle est donc développable en une série de la forme

$$D\log\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}},$$

et convergente dans la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1 (*fig.* 80). Les coefficients sont donnés par la formule

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} D\log\theta(z)e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}dz.$$

La fonction $D\log\theta(z)$ étant impaire, on a $A_0 = 0$ et $A_{-m} = -A_m$. On déterminera le coefficient A_m à l'aide du parallélogramme A'EFA, comme précédemment; les parties de l'intégrale relative aux deux côtés opposés A'E, FA étant égales et de signes contraires, et celle relative au côté EF étant infiniment petite, l'intégrale relative au contour de ce parallélogramme se réduit à $-\frac{\omega}{2\pi i}A_m$. Le résidu relatif au point $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$ est égal à $q^{(2n-1)m}$, puisque le résidu de $D\log\theta(z)$ est égal à l'unité. On a donc

$$A_m = -\frac{2\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2n-1)m} = -\frac{2\pi i}{\omega}\frac{q^m}{1-q^{2m}},$$

et la série devient

$$(4)\qquad D\log\theta(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega}.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$, on en déduit la série

$$(5)\qquad D\log\theta_3(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

convergente dans la même bande.

296. Le développement de la fonction $D\log\theta_1(z)$ ne peut pas s'effectuer dans cette bande, à cause des infinis $z = m\omega$, situés sur la droite AA'; mais on évite cette difficulté en développant la fonction

$$\varphi(z) = D\log\frac{\theta_1(z)}{\sin\frac{\pi z}{\omega}} = D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega},$$

qui n'a plus ces infinis. Cette fonction impaire, admettant la période ω, est développable en une série de la forme

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \left(e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}} - e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}}\right),$$

et convergente dans la bande comprise entre les parallèles à la direction ω menées par les points $z = \pm\,\omega'$. Pour évaluer les coefficients

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \varphi(z)\, e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}}\, dz,$$

on considère l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\, e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}}\, dz,$$

relative au contour d'un parallélogramme A'EFA, dont les sommets A et A' sont les points $z = \pm\frac{\omega}{2}$, et les sommets F et E les points $z = \pm\frac{\omega}{2} - (2n'+1)\frac{\omega'}{2}$. Les parties relatives aux côtés A'E, EA se détruisant, et celle relative au côté EF étant infiniment petite, l'intégrale se réduit à $-\frac{\omega}{2\pi i}A_m$. D'autre part, la somme des résidus relatifs aux pôles $\alpha = -n\omega'$, situés dans ce parallélogramme, est $\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}$. On a donc

$$A_m = -\frac{2\pi i}{\omega}\,\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}},$$

et par suite

$$\varphi(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

$$\text{(6)}\qquad D\log\theta_1(z) = \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega}.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$, on obtient la série

$$(7)\qquad D\log\theta_2(z) = -\frac{\pi}{\omega}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

convergente dans la même étendue.

Développement des logarithmes des fonctions elliptiques.

297. Des développements que nous venons de trouver, on déduit immédiatement ceux des logarithmes des rapports des fonctions θ deux à deux. On a, par exemple,

$$D\log\lambda(z) = D\log\theta_1(z) - D\log\theta(z),$$
$$D\log\mu(z) = D\log\theta_2(z) - D\log\theta(z),$$
$$D\log\nu(z) = D\log\theta_3(z) - D\log\theta(z),$$

et par suite

$$(8)\qquad D\log\lambda(z) = \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^m}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

$$(9)\qquad D\log\mu(z) = -\frac{\pi}{\omega}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

$$(10)\qquad D\log\nu(z) = -\frac{8\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2(2m-1)}}\sin\frac{2(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Ces séries sont convergentes dans la partie du plan comprise entre les parallèles à la direction ω menées par les points $\pm\frac{\omega'}{2}$. Par l'intégration, on obtiendrait les développements des fonctions $\log\theta(z)$ et des fonctions $\log\lambda(z)$, $\log\mu(z)$, $\log\nu(z)$.

298. Remarque I. — L'équation (9) donne une démonstration simple d'une propriété remarquable des nombres entiers. Le premier

membre est égal à $\frac{-g\lambda(z)\nu(z)}{\mu(z)}$; sa dérivée, pour $z = 0$, se réduit à $-g^2$; en prenant de même la dérivée du second membre et faisant $z = 0$, on obtient l'équation

$$\text{(11)} \qquad \frac{g^2\omega^2}{\pi^2} = 1 + 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{mq^m}{1+(-1)^m q^m}.$$

Mais nous avons trouvé (n° 205)

$$\text{(12)} \qquad \sqrt{\frac{g\omega}{\pi}} = \theta_1(0) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}.$$

Il en résulte l'identité

$$\text{(13)} \qquad 1 + 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{mq^m}{1+(-1)^m q^m} = \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}\right)^4.$$

Le premier membre, ordonné par rapport aux puissances croissantes de q, contient toutes les puissances de q, et dans le second membre, ordonné de la même manière, chacun des exposants est la somme de quatre carrés; à cause de l'identité, on en conclut que tout nombre entier est la somme de quatre carrés.

299. Remarque II. — L'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

à laquelle satisfait la fonction $u = \lambda(z)$, dont le multiplicateur est égal à l'unité, peut s'écrire

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-k^2u^2}\, dz = \nu(z)\, dz;$$

on en déduit

$$\arcsin u = \int_0^z \nu(z)\, dz,$$

et, en vertu de la série (3),

$$(14) \qquad \arcsin \lambda(z) = \frac{\pi z}{\omega} + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^m}{m(1+q^{2m})} \sin \frac{2m\pi z}{\omega}.$$

La même équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{du}{\sqrt{1-k^2u^2}} = \sqrt{1-u^2}\,dz = \mu(z)\,dz;$$

on en déduit

$$\frac{1}{k} \arcsin ku = \int_0^z \mu(z)\,dz,$$

et, en vertu de la série (2),

$$(15) \qquad \arcsin k\lambda(z) = 4\sqrt{q} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}}{(2m-1)(1+q^{2m-1})} \sin \frac{(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $z = \frac{\omega}{2}$, on obtient la série

$$(16) \qquad \arcsin k = 4\sqrt{q} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m-1} q^{m-1}}{(2m-1)(1+q^{2m-1})},$$

ou, d'après une remarque faite au n° 68,

$$(17) \qquad \arcsin k = 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m-1} \operatorname{arc\,tang} q^{\frac{2m-1}{2}}.$$

Les développements exposés dans ce Chapitre ont été trouvés par Jacobi (*Fundamenta nova*).

LIVRE VII.

ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS θ.

Formule fondamentale.

300. Les fonctions

$$A\frac{\theta_1(z-x)\theta_1(z+x-a-b)}{\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)},\quad B\frac{\theta_1(z-y)\theta_1(z+y-a-b)}{\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)}.$$

admettant les deux périodes ω, ω', leur somme

$$\varphi(z)=\frac{A\theta_1(z-x)\theta_1(z+x-a-b)+B\theta_1(z-y)\theta_1(z+y-a-b)}{\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)}$$

admet ces mêmes périodes; c'est une fonction méromorphe doublement périodique du second ordre, dont les infinis sont a et b. Or on peut disposer des coefficients A et B, de manière que le numérateur s'annule pour $z=a$ et pour $z=b$; il suffit pour cela que ces coefficients satisfassent à la condition

$$A\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)+B\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)=0,$$

qui, à cause de la symétrie, est la même pour les deux racines; alors

la fonction $\varphi(z)$, qui ne devient plus infinie, est une constante. L'un des coefficients restant arbitraire, on peut en disposer de manière que cette valeur constante soit égale à l'unité. On a ainsi l'équation

$$\theta_1(z-a)\theta_1(z-b) = \mathrm{A}\theta_1(z-x)\theta_1(z+x-a-b) + \mathrm{B}\theta_1(z-y)\theta_1(z+y-a-b).$$

Si l'on y fait successivement $z=y$, $z=x$, on obtient les coefficients

$$\mathrm{A} = -\frac{\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)}{\theta_1(x-y)\theta_1(x+y-a-b)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)}{\theta_1(x-y)\theta_1(x+y-a-b)},$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} &\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)\theta_1(y+z-a-b)\theta_1(y-z) \\ +&\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)\theta_1(z+x-a-b)\theta_1(z-x) \\ +&\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)\theta_1(x+y-a-b)\theta_1(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Nous y remplacerons a et b par $-a$ et $-b$, et nous l'écrirons sous la forme

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta_1(x+a)\theta_1(x+b)\theta_1(y+z+a+b)\theta_1(y-z) \\ +&\theta_1(y+a)\theta_1(y+b)\theta_1(z+x+a+b)\theta_1(z-x) \\ +&\theta_1(z+a)\theta_1(z+b)\theta_1(x+y+a+b)\theta_1(x-y) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation renferme cinq quantités arbitraires x, y, z, a, b. On déduit le deuxième terme du premier, et le troisième du deuxième, par la permutation circulaire des lettres x, y, z. Le premier membre est une fonction symétrique des deux quantités a et b, et une fonction alternée des trois quantités x, y, z deux à deux. On vérifie aisément que l'équation ne change pas lorsqu'on ajoute ω ou ω' à l'une quelconque des cinq quantités x, y, z, a, b, et qu'elle ne change pas non plus lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ aux cinq quantités à la fois.

301. De cette équation fondamentale on déduit un grand nombre d'équations de même forme, en ajoutant, soit $\frac{\omega}{2}$, soit $\frac{\omega'}{2}$, soit $\frac{\omega+\omega'}{2}$, à une ou à plusieurs des cinq quantités x, y, z, a, b, ce qui remplace les

fonctions θ_1 par d'autres fonctions θ. Chacune des lettres x, y, z entre dans deux des quatre fonctions θ qui composent chaque terme de l'équation; chacune des lettres a et b entre aussi dans deux de ces fonctions. Quelles que soient les quatre fonctions θ qui composent un terme, on reconnaît que, lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ à l'une des quantités x, y, z, deux fonctions θ sont remplacées par d'autres, et, au signe près, les trois termes de l'équation sont multipliés par un même facteur dont on peut faire abstraction; il en est de même lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ à l'une des quantités a et b. Le premier membre de chacune des équations renferme douze fonctions portant sur les quantités

$$\begin{gathered}(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),\\(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x),\\(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),\end{gathered}$$

que nous supposerons toujours disposées dans le même ordre, ce qui nous dispensera de les écrire. Chacune des quatre fonctions θ pouvant porter sur douze quantités, les équations renferment en tout 12×4 ou 48 fonctions θ.

Nous déduirons toutes ces équations de l'équation fondamentale, en attribuant à chacune des cinq lettres x, y, z, a, b qu'elle renferme quatre valeurs différentes; par exemple, nous attribuerons à x les quatre valeurs $x,\ x+\frac{\omega}{2},\ x+\frac{\omega'}{2},\ x+\frac{\omega+\omega'}{2}$. Puisque l'équation ne change pas lorsque les cinq lettres éprouvent la même modification, nous pouvons laisser invariable l'une des lettres et nous borner à attribuer à chacune des quatre autres les quatre valeurs dont elle est susceptible, ce qui donnera 4^4 ou 256 équations différentes. Lorsque les deux lettres a et b éprouvent une même modification, l'équation reste symétrique par rapport à a et à b; mais si une seule de ces lettres est modifiée, ou si elles éprouvent des modifications différentes, l'équation cesse d'être symétrique. Lorsqu'une seule des trois lettres x, y, z, par exemple x, est modifiée, ou lorsque les deux lettres y et z éprouvent la même modification, le premier membre de l'équation est encore alterne par rapport aux deux lettres y et z; mais il cesse de l'être par rapport à x et

à y et par rapport à x et à z. Nous sommes conduits de la sorte à ranger les 256 équations en six classes, de la manière suivante.

302. Première classe. *Relations alternes par rapport à deux quelconques des lettres x, y, z et symétriques en a et b.* — On les déduit de l'équation fondamentale en ajoutant aux deux lettres a et b la même quantité $0, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$, ce qui donne les *quatre* équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 + \theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 + \theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 &= 0.
\end{aligned}$$

303. Deuxième classe. *Relations alternes par rapport à deux quelconques des lettres x, y, z, mais non symétriques en a et b.* — On les déduit de l'équation fondamentale en ajoutant aux deux lettres a et b des quantités différentes; comme on peut ajouter les six couples de quantités

$$\left(0, \frac{\omega'}{2}\right),\quad \left(0, \frac{\omega}{2}\right),\quad \left(0, \frac{\omega+\omega'}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)$$

dans un ordre ou dans l'autre, on obtient *douze* équations de la seconde classe. On a d'abord les six équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\theta\;\theta\;\theta_1 + \theta_1\theta\;\theta\;\theta_1 + \theta_1\theta\;\theta\;\theta_1 &= 0,\\
\theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 + \theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 + \theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 &= 0,\\
\theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 &= 0,\\
\theta\;\theta_2\theta_3\theta_1 + \theta\;\theta_2\theta_3\theta_1 + \theta\;\theta_2\theta_3\theta_1 &= 0,\\
\theta\;\theta_3\theta_2\theta_1 + \theta\;\theta_3\theta_2\theta_1 + \theta\;\theta_3\theta_2\theta_1 &= 0,\\
\theta_2\theta_3\theta\;\theta_1 + \theta_2\theta_3\theta\;\theta_1 + \theta_2\theta_3\theta\;\theta_1 &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant aux lettres a et b les mêmes quantités en ordre inverse, on obtient six autres équations qui se déduisent des précédentes par la permutation des lettres a et b; afin de laisser les quantités $x+a$, $x+b, \ldots$ dans le même ordre, on permutera dans chaque terme les deux premières fonctions θ considérées comme de purs symboles, de

manière que la fonction qui portait sur $x + a$ porte maintenant sur $x + b$, et réciproquement.

304. Troisième classe. *Relations alternes par rapport à deux des lettres x, y, z et symétriques en a et b.* — Si, dans les équations de la première classe, on ajoute à x l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega + \omega'}{2}$, on forme douze équations symétriques en a et b, et alternes par rapport à y et z :

$$\begin{aligned}
&\theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta\ \theta\ + \theta_1\theta_1\theta\ \theta\ = 0,\\
&\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta\ \theta\ \theta\ \theta\ + \theta\ \theta\ \theta\ \theta\ = 0,\\
&\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta\ \theta\ - \theta_2\theta_2\theta\ \theta\ = 0,\\
&\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta\ \theta\ - \theta_3\theta_3\theta\ \theta\ = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 = 0,\\
&\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 - \theta\ \theta\ \theta_2\theta_2 + \theta\ \theta\ \theta_2\theta_2 = 0,\\
&\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 = 0,\\
&\theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 - \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 = 0,\\
&\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 - \theta\ \theta\ \theta_3\theta_3 + \theta\ \theta\ \theta_3\theta_3 = 0,\\
&\theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 - \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 = 0,\\
&\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 - \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 = 0.
\end{aligned}$$

On a de même douze équations alternes par rapport à z et x, et douze alternes par rapport à x et y, ce qui fait $4 \times 3 \times 3$ ou 36 équations de la troisième classe. Des premières on déduit les secondes en permutant circulairement les trois lettres x, y, z ; ceci revient à permuter circulairement les trois termes considérés comme des symboles, en laissant toujours les quantités $x + a$, $x + b$,... dans le même ordre ; on déduit de même les troisièmes des secondes.

305. Quatrième classe. *Relations alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, mais non symétriques en a et b.* — Elles se déduisent de celles de la seconde classe de la même manière que la troisième classe de la première. Si, dans les équations de la seconde classe, on ajoute à x l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega + \omega'}{2}$, on forme 12×3 ou 36 équa-

tions non symétriques en a et b, et alternes par rapport à y et z. On a d'abord les 18 équations

$$\begin{aligned}
&\theta\,\theta_1\theta\,\theta_1 - \theta_1\theta\,\theta_1\theta + \theta_1\theta\,\theta_1\theta = 0,\\
&\theta\,\theta_3\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2\theta_3\theta + \theta_1\theta_2\theta_3\theta = 0,\\
&\theta\,\theta_2\theta_3\theta_1 - \theta_1\theta_3\theta_2\theta + \theta_1\theta_3\theta_2\theta = 0,\\
&\theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 - \theta\,\theta_2\theta_2\theta + \theta\,\theta_2\theta_2\theta = 0,\\
&\theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 - \theta\,\theta_3\theta_3\theta + \theta\,\theta_3\theta_3\theta = 0,\\
&\theta_3\theta_2\theta\,\theta_1 + \theta_2\theta_3\theta_1\theta - \theta_2\theta_3\theta_1\theta = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1 - \theta_1\theta\,\theta_3\theta_2 + \theta_1\theta\,\theta_3\theta_2 = 0,\\
&\theta_2\theta_1\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_1\theta_2 = 0,\\
&\theta_2\theta\,\theta_3\theta_1 - \theta_1\theta_3\theta\,\theta_2 + \theta_1\theta_3\theta\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_3\theta_1\theta_3\theta_1 + \theta\,\theta_2\theta\,\theta_2 - \theta\,\theta_2\theta\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_3\theta\,\theta_2\theta_1 + \theta\,\theta_3\theta_1\theta_2 - \theta\,\theta_3\theta_1\theta_2 = 0,\\
&\theta_1\theta\,\theta\,\theta_1 + \theta_2\theta_3\theta_3\theta_2 - \theta_2\theta_3\theta_3\theta_2 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_3\theta_2\theta\,\theta_1 - \theta_1\theta\,\theta_2\theta_3 + \theta_1\theta.\theta_2\theta_3 = 0,\\
&\theta_3\theta\,\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2\theta\,\theta_3 + \theta_1\theta_2\theta\,\theta_1 = 0,\\
&\theta_3\theta_1\theta_3\theta_1 - \theta_1\theta_3\theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_3\theta_1\theta_3 = 0,\\
&\theta_2\theta\,\theta_3\theta_1 + \theta\,\theta_2\theta_1\theta_3 - \theta\,\theta_2\theta_1\theta_3 = 0,\\
&\theta_2\theta_1\theta_2\theta_1 + \theta\,\theta_3\theta\,\theta_3 - \theta\,\theta_3\theta\,\theta_3 = 0,\\
&\theta\,\theta_1\theta\,\theta_1 - \theta_2\theta_3\theta_2\theta_3 + \theta_2\theta_3\theta_2\theta_3 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient les 18 autres en permutant dans chaque terme les deux premières fonctions θ. On a, de même, 36 équations alternes par rapport à z et x, que l'on déduit des précédentes par la permutation circulaire des termes, et 36 équations alternes par rapport à x et y, ce qui fait en tout $12 \times 3 \times 3 = 108$ équations de la quatrième classe.

306. Cinquième classe. *Relations non alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, et symétriques en a et b.* — On les déduit des équations de la première classe, en ajoutant aux trois lettres x, y, z trois quantités différentes, prises à volonté parmi les quatre quantités 0, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$; mais nous pouvons exclure la dernière $\frac{\omega+\omega'}{2}$; car supposons que l'on ajoute à x, y, z respectivement 0, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$;

en retranchant des cinq lettres la même quantité $\frac{\omega'}{2}$, ce qui ne change pas l'équation, on ramène ce cas à celui où l'on ajoute $-\frac{\omega'}{2}$, o, $\frac{\omega}{2}$, ou $\frac{\omega'}{2}$, o, $\frac{\omega}{2}$. De même, supposons que l'on ajoute à x, y, z respectivement $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$; en retranchant des cinq lettres la même quantité $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on ramène ce cas à celui où l'on ajoute $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, o. Ainsi nous pouvons nous borner à ajouter à x, y, z les trois quantités o, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$ prises dans un ordre quelconque; nous obtiendrons de la sorte 4×6, ou 24 équations de la cinquième classe.

En remplaçant, dans les équations de la première classe, y par $y + \frac{\omega'}{2}$ et z par $z + \frac{\omega}{2}$, sans changer x, on forme les quatre équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\,\theta_1\,\theta_3\,\theta_3 + \theta\;\theta\;\theta_2\,\theta_2 - \theta_2\,\theta_2\,\theta\;\theta &= 0,\\
\theta\;\theta\;\theta_3\,\theta_3 + \theta_1\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_2 - \theta_3\,\theta_3\,\theta\;\theta &= 0,\\
\theta_2\,\theta_2\,\theta_3\,\theta_3 - \theta_3\,\theta_3\,\theta_2\,\theta_2 - \theta_1\,\theta_1\,\theta\;\theta &= 0,\\
\theta_3\,\theta_3\,\theta_3\,\theta_3 - \theta_2\,\theta_2\,\theta_2\,\theta_2 - \theta\;\theta\;\theta\;\theta &= 0.
\end{aligned}$$

Concevons maintenant que l'on permute deux quelconques des trois lettres x, y, z, par exemple y et z; les douze quantités

$$\begin{aligned}
&(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),\\
&(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x),\\
&(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),
\end{aligned}$$

sur lesquelles portent les douze fonctions θ qui entrent dans chaque équation, deviennent

$$\begin{aligned}
&(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ -y+z),\\
&(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ -x+y),\\
&(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ -z+x).
\end{aligned}$$

Comme on peut changer le signe de la quantité sur laquelle porte la dernière fonction θ dans chaque terme, puisque cette fonction est paire,

on substituera à ces quantités les suivantes :

$$(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),$$
$$(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),$$
$$(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x).$$

Pour rétablir l'ordre primitif, il suffit de permuter les deux derniers termes de l'équation. Il résulte de là que l'on peut, dans les quatre équations précédentes, permuter les termes deux à deux de toutes les manières possibles; les trois termes de chaque équation présentant six arrangements, on a ainsi les 24 équations de la cinquième classe.

307. Sixième classe. *Relations non alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, et non symétriques en a et b.* — Elles se déduisent de celles de la deuxième classe, comme la cinquième classe de la première, ce qui fait 12×6 ou 72 équations. Si, dans les 12 équations de la deuxième classe, on remplace y par $y+\frac{\omega'}{2}$ et z par $z+\frac{\omega}{2}$, sans changer x, on obtient les 6 équations

$$\theta_1\,\theta\,\theta_2\,\theta_3 + \theta\,\theta_1\,\theta_3\,\theta_2 - \theta_2\,\theta_3\,\theta_1\,\theta = 0,$$
$$\theta_1\,\theta_2\,\theta\,\theta_3 - \theta\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_2 + \theta_2\,\theta_1\,\theta_3\,\theta = 0,$$
$$\theta_1\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_3 - \theta\,\theta_2\,\theta\,\theta_2 + \theta_2\,\theta\,\theta_2\,\theta = 0,$$
$$\theta\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_3 - \theta_1\,\theta_3\,\theta\,\theta_2 - \theta_3\,\theta_1\,\theta_2\,\theta = 0,$$
$$\theta\,\theta_3\,\theta\,\theta_3 - \theta_1\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_2 - \theta_3\,\theta\,\theta_3\,\theta = 0,$$
$$\theta_2\,\theta_3\,\theta_2\,\theta_3 - \theta_3\,\theta_2\,\theta_3\,\theta_2 + \theta_1\,\theta\,\theta_1\,\theta = 0,$$

et les 6 que l'on en déduit en permutant dans chaque terme les deux premières fonctions θ. En permutant ensuite les termes deux à deux, comme nous l'avons expliqué, on formera les 72 équations cherchées.

Équations à deux lettres.

308. Première espèce. — Les équations précédentes renferment cinq quantités arbitraires x, y, z, a, b. Si l'on attribue à quelques-unes de ces lettres des valeurs déterminées, ou si l'on établit entre elles certaines relations, les équations ne renfermeront plus qu'un moindre

nombre de quantités. Supposons que l'on fasse $x = y = z = 0$; les quatre fonctions θ, qui composent chaque terme, porteront sur les quantités a, b, $a + b$, o; les équations des quatre premières classes, qui sont alternes au moins par rapport à deux des lettres x, y, z, se réduisent à des identités; les équations des deux dernières classes, étant indépendantes de l'ordre des termes, se réduisent à seize équations distinctes, savoir : quatre pour la cinquième classe et douze pour la sixième. On a ainsi un premier groupe de quatre équations

$$\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0) + \theta(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0) - \theta_2(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta(a)\theta(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0) + \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0) - \theta_3(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta_2(a)\theta_2(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0) - \theta_3(a)\theta_3(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0) - \theta_1(a)\theta_1(b)\theta(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta_3(a)\theta_3(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0) - \theta_2(a)\theta_2(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0) - \theta(a)\theta(b)\theta(a+b)\theta(0) = 0,$$

et un second groupe formé des six équations

$$\theta_1(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta_3(0) + \theta(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta_2(0) - \theta_2(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta_2(a)\theta_3(b)\theta_2(a+b)\theta_3(0) - \theta_3(a)\theta_2(b)\theta_3(a+b)\theta_2(0) + \theta_1(a)\theta(b)\theta_1(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta_1(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta_3(0) - \theta(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta_2(0) + \theta_2(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta(a)\theta_2(b)\theta_1(a+b)\theta_3(0) - \theta_1(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta_2(0) - \theta_3(a)\theta_1(b)\theta_2(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta_1(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta_3(0) - \theta(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta_2(0) + \theta_2(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta(0) = 0,$$
$$\theta(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta_3(0) - \theta_1(a)\theta_2(b)\theta_1(a+b)\theta_2(0) - \theta_3(a)\theta(b)\theta_3(a+b)\theta(0) = 0,$$

et des six qu'on en déduit en permutant a et b, ou, ce qui est la même chose, les deux premières fonctions θ dans chaque terme. Ces seize équations trinômes entre les quatre quantités $\theta(a + b)$ déterminent les rapports de trois de ces quantités à la quatrième, et, par conséquent, se réduisent à un système de trois équations distinctes.

309. Seconde espèce. — Supposons que l'on fasse $y = z = 0$ et $b = -a$, les douze quantités sur lesquelles portent les fonctions θ, dans chaque équation, deviennent

$$(x + a, x - a, 0, 0), \quad (a, -a, x, -x), \quad (a, -a, x, x).$$

Les deux quantités y et z étant égales, les équations des deux premières classes se réduisent à des identités. La troisième classe se com-

pose de trois groupes de douze équations; celles du premier groupe, étant alternes par rapport à y et z, se réduisent aussi à des identités; celles du troisième groupe, se déduisant de celles du deuxième par la permutation de y et z, se confondent avec celles-ci; il suffit donc de considérer les douze équations du deuxième groupe. La cinquième classe se compose de deux groupes de douze équations, tels que le second se déduit du premier par la permutation des deux derniers termes; ces deux groupes se confondant, il suffit de considérer les douze équations du premier groupe. Ainsi la troisième et la cinquième classe donnent les 24 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta^2(x) - \theta^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) - \theta^2(a)\,\theta_2^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) + \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) = \theta^2(a)\,\theta_2^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_2^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta^2(a)\,\theta^2(x),\\
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_3^2(0) &= -\theta^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta^2(x) = \theta^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_1^2(a)\,\theta^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x) + \theta^2(a)\,\theta^2(x).
\end{aligned}$$

Les deuxièmes membres proviennent de la troisième classe, les troisièmes de la cinquième classe. Les premiers membres étant symétriques ou alternes par rapport à x et a, les deuxièmes et les troisièmes membres jouissent de la même propriété. Les produits $\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)$, formés d'une même fonction θ, sont égaux, d'après cela, à des expressions binômes renfermant les carrés de deux fonctions $\theta\,(x)$ et les carrés de deux fonctions $\theta\,(a)$.

Remarquons que les six expressions d'un même produit peuvent se déduire de l'une d'entre elles, à l'aide des deux relations linéaires qui existent entre les quatre fonctions $\theta^2(x)$ et de celles qui existent entre les quatre fonctions $\theta^2(a)$ (n° 157).

310. La quatrième classe se compose de trois groupes de 36 équations; le premier groupe se réduisant à des identités, et le troisième se confondant avec le deuxième, il suffit de considérer celui-ci. Dans ce deuxième groupe, il y a 12 équations qui renferment la quantité nulle $\theta_1(0)$, et qui, par conséquent, se réduisent à des identités; il en reste 24, qui se confondent deux à deux; le nombre des équations distinctes est donc 12. On reconnaît d'ailleurs que la sixième classe donne les mêmes équations que la quatrième. Ces équations sont les six suivantes :

$$\theta_1(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0)=\theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta\,(x)\,\theta_1(x)+\theta_1(a)\,\theta\,(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$

$$\theta_1(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta\,(0)=\theta\,(a)\,\theta_3(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x)+\theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_3(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta_1(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta\,(0)=\theta\,(a)\,\theta_2(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x)+\theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_2(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta\,(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta\,(0)=\theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x)+\theta\,(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta\,(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta\,(0)=\theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x)+\theta\,(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta_2(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0)=-\,\theta_1(a)\,\theta(a)\,\theta(x)\,\theta_1(x)+\theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$

et les six qu'on en déduit, en remplaçant a par $-a$. Les deuxièmes membres, comme les premiers, sont symétriques ou alternes par rapport à x et a. Les produits $\theta(x+a)\,\theta(x-a)$, formés de deux fonctions θ différentes, sont égaux à des binômes renfermant chacun les quatre fonctions $\theta(x)$ et les quatre fonctions $\theta(a)$.

Formules de Jacobi.

311. Des relations précédentes on déduit aisément des formules remarquables trouvées par Jacobi (*Journal de Crelle*, 1845). Soient a, b, c, d quatre quantités arbitraires; si l'on désigne par a', b', c', d' quatre quantités nouvelles définies par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 2a'=-a+b+c+d, & 2b'=a-b+c+d,\\ 2c'=a+b-c+d, & 2d'=a+b+c-d,\end{array}\right.$$

on a réciproquement

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 2a=-a'+b'+c'+d', & 2b=a'-b'+c'+d',\\ 2c=a'+b'-c'+d', & 2d=a'+b'+c'-d'.\end{array}\right.$$

On peut remplacer ces deux systèmes de formules par les relations équivalentes

$$(3) \qquad a+a'=b+b'=c+c'=d+d', \quad a+b=c'+d'.$$

On a aussi la relation

$$(4) \qquad a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2.$$

Supposons maintenant que, dans les six classes d'équations générales, on fasse $a=\alpha$, $b=-\alpha$, c'est-à-dire $a+b=0$; chacune d'elles renfermera les douze quantités

$$(x+\alpha, x-\alpha, y+z, y-z), \ (y+\alpha, y-\alpha, z+x, z-x), \ (z+\alpha, z-\alpha, x+y, x-y),$$

dans l'ordre où nous les avons écrites. Si l'on pose

$$x+\alpha=a, \quad x-\alpha=b, \quad y+z=c, \quad y-z=d,$$

d'où

$$x=\frac{a+b}{2}, \quad \alpha=\frac{a-b}{2}, \quad y=\frac{c+d}{2}, \quad z=\frac{c-d}{2},$$

on aura

$$y+\alpha=b', \quad y-\alpha=a', \quad z+x=d', \quad z-x=-c'.$$

Dans chaque équation, les quatre facteurs du premier terme porteront sur a, b, c, d les quatre facteurs du second terme sur b', a', d', $-c'$; afin de conserver l'ordre alphabétique des lettres, on permutera dans le second terme les deux premiers facteurs entre eux, ainsi que les deux derniers, en ayant soin, avant la permutation, de changer le signe de la quantité qui entre dans le dernier facteur.

Dans le troisième terme entrent les quantités

$$z+\alpha=\frac{a-b+c-d}{2}, \qquad x+y=\frac{a+b+c+d}{2},$$
$$z-\alpha=\frac{-a+b+c-d}{2}, \qquad x-y=\frac{a+b-c-d}{2},$$

que nous désignerons par a'', b'', c'', d''. De cette manière, dans chacune des équations, les quatre fonctions qui forment le premier terme por-

teront sur les quantités a, b, c, d, celles du second sur a', b', c', d', et celles du troisième sur a'', b'', c'', d'', dans l'ordre alphabétique des lettres.

312. Cela posé, considérons celles de ces équations qui renferment le terme $\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3$, que nous supposerons placé au troisième rang par des permutations circulaires, et égalons les valeurs qu'on en tire pour $\theta_3(a'')\theta_3(b'')\theta_3(c'')\theta_3(d'')$; nous aurons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta\,\theta + (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)' = \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + (\theta\,\theta\,\theta\,\theta)' \\ &= \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)' = \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)'. \end{aligned}\right.$$

En égalant les valeurs de $\theta(a'')\theta(b'')\theta(c'')\theta(d'')$, on a de même

$$(6)\qquad \theta\,\theta\,\theta\,\theta + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 = (\theta\,\theta\,\theta\,\theta)' + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)'.$$

Les termes non accentués renferment les lettres a, b, c, d, les termes accentués les lettres a', b', c', d'. Les relations (5) et (6) ont la même forme que les relations (3); les deux suites de quantités

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta\,\theta, & \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2, & \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1, & \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)', & (\theta\,\theta\,\theta\,\theta)', & (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)', & (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)' \end{matrix}\right.$$

y jouent le même rôle que les deux suites de quantités

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d' \end{matrix}$$

dans les équations (3). On en déduit les formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} 2(\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)' &= -\theta\,\theta\,\theta\,\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta\,\theta\,\theta\,\theta) &= \theta\,\theta\,\theta\,\theta - \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)' &= \theta\,\theta\,\theta\,\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 - \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)' &= \theta\,\theta\,\theta\,\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \end{aligned}\right.$$

analogues aux formules (1). On en déduit ainsi la relation

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\theta\,\theta\,\theta\,\theta)^2 + (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)^2 + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)^2 + (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)^2 \\ &= [(\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)']^2 + [(\theta\,\theta\,\theta\,\theta)']^2 + [(\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)']^2 + [(\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)']^2, \end{aligned}\right.$$

analogue à la relation (4).

A cause de la symétrie des formules, il est clair que l'on peut permuter à volonté deux termes de l'une des lignes A, pourvu que l'on permute aussi les termes correspondants de l'autre ligne. Les relations ne changent pas.

313. En égalant de même les valeurs de $(\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)''$ et celles de $(\theta\theta\theta_1\theta_1)''$, on obtient les relations

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + (\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)' = \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' \\ &= \theta_1\theta_1\theta\,\theta + (\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)' = \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 + (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)', \\ &\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta\,\theta = (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' + (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta_1\theta_1, & \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3, & \theta_1\theta_1\theta\,\theta, & \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ (\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)', & (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)', & (\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)', & (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)'. \end{matrix}\right.$$

On en déduit les formules

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} 2(\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)' &= -\theta\theta\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' &= \theta\theta\theta_1\theta_1 - \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)' &= \theta\theta\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 - \theta_1\theta_1\theta\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta_1\theta_1\theta\,\theta)' &= \theta\theta\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\theta - \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2. \end{aligned}\right.$$

En égalant les valeurs de $(\theta_2\theta_2\theta\theta)''$ et celles de $(\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)''$, on obtient les relations

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2 + (\theta_1\theta_1\theta_3\theta_3)' = \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 + (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)' \\ &= \theta_2\theta_2\theta\,\theta + (\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)' = \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)', \\ &\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2 + \theta_2\theta_2\theta\,\theta = (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)' + (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta_2\theta_2, & \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3, & \theta_2\theta_2\theta\,\theta, & \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1, \\ (\theta_1\theta_1\theta_3\theta_3)', & (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)', & (\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)', & (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)'. \end{matrix}\right.$$

En égalant les valeurs de $(\theta_3\theta_3\theta\theta)''$ et celles de $(\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)''$, on

obtient les relations

$$
(12)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3 + (\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2)' = \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 + (\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)' \\
= &\theta_3\theta_3\theta\,\theta + (\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)' = \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + (\theta_3\theta_3\theta\,\theta)', \\
&\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3 + \theta_3\theta_3\theta\,\theta = (\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)' + (\theta_3\theta_3\theta\,\theta)',
\end{aligned} \right.
$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$
(\mathrm{D})\quad \left\{ \begin{matrix}
\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3, & \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2, & \theta_3\theta_3\theta\,\theta, & \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1, \\
(\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2)', & (\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)', & (\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)', & (\theta_3\theta_3\theta\,\theta)'.
\end{matrix} \right.
$$

Dans les trois groupes de relations caractérisés par les dispositions (B), (C), (D), on peut, à cause de la symétrie des relations, permuter deux termes de l'une des lignes et les deux termes correspondants de la seconde ligne. La symétrie des formules (1) et (2) permet aussi de permuter deux quelconques des lettres a, b, c, d; ceci revient à changer l'ordre des facteurs dans les relations précédentes. Nous avons ainsi toutes les relations où la même fonction forme deux facteurs d'un terme, et une autre les deux autres facteurs.

314. En égalant les valeurs de $(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)''$ et celles de $(\theta\theta_1\theta_2\theta_3)''$, on obtient aussi les relations

$$
(13)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3 + (\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3)' = \theta_3\theta_2\theta_1\theta + (\theta_3\theta_2\theta_1\theta)' \\
= &\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1 + (\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1)' = \theta_1\theta\,\theta_3\theta_2 + (\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)', \\
&\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_2\theta_3\theta\,\theta_1 = (\theta_3\theta_2\theta_1\theta)' + (\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)',
\end{aligned} \right.
$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$
(\mathrm{E})\quad \left\{ \begin{matrix}
\theta\theta_1\theta_2\theta_3, & \theta_3\theta_2\theta_1\theta, & \theta_2\theta_3\theta\theta_1, & \theta_1\theta\theta_3\theta_2, \\
(\theta\theta_1\theta_2\theta_3)', & (\theta_3\theta_2\theta_1\theta)', & (\theta_2\theta_3\theta\theta_1)', & (\theta_1\theta\theta_3\theta_2)'.
\end{matrix} \right.
$$

On en déduit les formules

$$
(14)\quad \left\{ \begin{aligned}
2(\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3)' &= -\theta\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2\theta_1\theta + \theta_2\theta_3\theta\theta_1 + \theta_1\theta\theta_3\theta_2, \\
2(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)' &= \theta\theta_1\theta_2\theta_3 - \theta_3\theta_2\theta_1\theta + \theta_2\theta_3\theta\theta_1 + \theta_1\theta\theta_3\theta_2, \\
2(\theta_2\theta_3\theta_1\theta)' &= \theta\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2\theta_1\theta - \theta_2\theta_3\theta\theta_1 + \theta_1\theta\theta_3\theta_2, \\
2(\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)' &= \theta\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2\theta_1\theta + \theta_2\theta_3\theta\theta_1 - \theta_1\theta\theta_3\theta_2.
\end{aligned} \right.
$$

Chaque terme est formé des quatre fonctions θ. On obtient toutes les relations de cette sorte, en permutant de la même manière les facteurs dans tous les termes.

315. Si, dans les équations générales, on fait $x = y = 0$, les douze fonctions θ, qui entrent dans chacune d'elles, portent sur les quantités

$$(a,\ b,\ a+b+z,\ -z),\quad (a,\ b,\ a+b+z,\ z),\quad (z+a,\ z+b,\ a+b,\ 0).$$

Les équations de la troisième classe qui contiennent l'un des termes $\theta\theta\theta\theta$, $\theta\theta\theta_3\theta_3$, $\theta\theta\theta_2\theta_2$, donnent

$$\begin{aligned}
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta(a+b)\,\theta(0)\\
&\quad = \theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z),\\
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta_3(a+b)\,\theta_3(0)\\
&\quad = \theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b+z) + \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z),\\
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta_2(a+b)\,\theta_2(0)\\
&\quad = \theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b+z) + \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z).
\end{aligned}$$

En divisant membre à membre les équations précédentes et celles que l'on obtient en remplaçant z par $-z$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(a+z)\,\theta(b+z)}{\theta(a-z)\,\theta(b-z)} &= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b-z) - \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}\\
&= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b+z) + \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b-z) - \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}\\
&= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b+z) + \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b-z) - \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne le premier membre par N, on en déduit

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda(a)\,\lambda(b) &= \frac{1}{k}\,\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta(a+b-z) - \theta(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)},\\
\mu(a)\,\mu(b) &= \frac{k'}{k}\,\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta_3(a+b-z) - \theta_3(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)},\\
\nu(a)\,\nu(b) &= k'\,\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta_2(a+b-z) - \theta_2(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)}.
\end{aligned}\right.$$

316. Ces dernières relations permettent de résoudre une question de Calcul intégral, intéressante par son analogie avec les fonctions abéliennes (*Académie des Sciences; Savants étrangers*, 1851; *Mémoire de Rosenhain*). Les deux équations différentielles simultanées

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{\Delta u}+\frac{dv}{\Delta v}=dx,\\ &\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)u^2}{1-k^2\lambda^2(a)u^2}\right]\frac{du}{\Delta u}+\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)v^2}{1-k^2\lambda^2(a)v^2}\right]\frac{dv}{\Delta v}=dy,\end{aligned}\right.$$

auxquelles on joint les conditions initiales $u=0$, $v=0$, $\Delta u=1$, $\Delta v=1$ pour $x=0$ et $y=0$, Δu et Δv désignant les deux radicaux $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$, $\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}$, définissent deux fonctions u et v des deux variables indépendantes x et y. On peut les mettre sous la forme

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^u\frac{du}{\Delta u}+\int_0^v\frac{dv}{\Delta v}=x,\\ &\int_0^u\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)u^2}{1-k^2\lambda^2(a)u^2}\right]\frac{du}{\Delta u}+\int_0^v\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)v^2}{1-k^2\lambda^2(a)v^2}\right]\frac{dv}{\Delta v}=y.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$z=\int_0^u\frac{du}{\Delta u},\quad t=\int_0^v\frac{dv}{\Delta v},$$

d'où $u=\lambda(z)$, $v=\lambda(t)$, ces équations deviennent, en vertu de la formule (21) du n° 275,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &z+t=x,\\ &\frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-t)}{\theta(a+t)}=y,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &z+t=x,\\ &\frac{\theta(z+a)\theta(t+a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)}=e^{-2y}.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant a, b, z par z, t, a dans les équations (15), et remar-

quant que la quantité N devient égale à e^{-2y}, on a

$$(20)\quad \begin{cases} \lambda(z)\lambda(t) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\theta(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta(x-a)-e^{y}\theta(x+a)}{e^{-y}\theta_1(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}, \\ \mu(z)\mu(t) = \dfrac{k'}{k}\dfrac{\theta_3(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta_3(x-a)-e^{y}\theta_3(x+a)}{e^{-y}\theta_1(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}, \\ \nu(z)\nu(t) = k'\dfrac{\theta_2(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta_2(x-a)-e^{y}\theta_2(x+a)}{e^{-y}\theta_1(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations sont des fonctions monotropes des deux variables indépendantes x et y. La première donne le produit uv, la seconde donne $\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}$, d'où l'on déduira u^2+v^2. On en conclut que u^2 et v^2 sont les racines d'une équation du second degré

$$(21)\qquad \varphi^2 - P\varphi + Q = 0,$$

dont les coefficients P et Q sont des fonctions monotropes des deux variables x et y. A chaque système de valeurs de x et y correspond un seul système de valeurs de u^2 et v^2; ces valeurs de u^2 et de v^2 se permutent, quand les variables x et y arrivent aux mêmes points par différents chemins.

A l'inspection des équations (20), on reconnaît que les quantités u^2v^2 et u^2+v^2 reprennent les mêmes valeurs quand on augmente x de ω, y ne changeant pas, ou y de πi, x ne changeant pas, ou simultanément x de ω' et y de $\frac{2\pi a i}{\omega}$. On en conclut que les deux fonctions monotropes P et Q reprennent les mêmes valeurs pour tous les systèmes de valeurs de x et de y compris dans les formules

$$x + m\omega + m''\omega', \quad y + m'\pi i + m''\frac{2\pi a i}{\omega},$$

m, m', m'' étant des nombres entiers quelconques. Ces deux fonctions admettent donc trois systèmes de périodes conjuguées :

$$\text{pour } x,\quad \omega,\quad 0,\quad \omega';$$
$$\text{pour } y,\quad 0,\quad \pi i,\quad \frac{2\pi a i}{\omega}.$$

CHAPITRE II.

ADDITION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

317. Nous avons trouvé (n° **308**) seize équations trinômes, linéaires et homogènes, entre les quatre quantités $\theta(a+b)$, $\theta_1(a+b)$, $\theta_2(a+b)$, $\theta_3(a+b)$, qui déterminent leurs rapports et qui, par conséquent, peuvent se réduire à trois d'entre elles. Si l'on divise tous les termes par le produit $\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(a+b)\,\theta(0)$, elles se transforment en des relations linéaires entre les trois quantités $\lambda(a+b)$, $\mu(a+b)$, $\nu(a+b)$. Les quatre premières

$$\begin{aligned}
&\mu(a+b)+\lambda(a)\lambda(b)\nu(a+b)-\mu(a)\mu(b)=0,\\
&\nu(a+b)+k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a+b)-\nu(a)\nu(b)=0,\\
&\nu(a)\nu(b)\mu(a+b)-\mu(a)\mu(b)\nu(a+b)+k'^2\lambda(a)\lambda(b)=0,\\
&\nu(a)\nu(b)\nu(a+b)-k^2\mu(a)\mu(b)\mu(a+b)-k'^2,
\end{aligned}$$

sont symétriques en a et b; les douze autres sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lambda(a)\mu(a+b)+\lambda(b)\nu(a+b)-\mu(a)\nu(b)\lambda(a+b)=0,\\
&\mu(a)\nu(b)\mu(a+b)-\nu(a)\mu(b)\nu(a+b)+k'^2\lambda(a)\lambda(a+b)=0,\\
&\lambda(a)\nu(b)\lambda(a+b)+\mu(a)\mu(a+b)-\mu(b)=0,\\
&\mu(b)\lambda(a+b)-\lambda(b)\nu(a)\mu(a+b)-\lambda(a)\nu(b)=0,\\
&\nu(b)\lambda(a+b)-\lambda(b)\mu(a)\nu(a+b)-\lambda(a)\mu(b)=0,\\
&\nu(a)\nu(a+b)+k^2\lambda(a)\mu(b)\lambda(a+b)-\nu(b)=0,
\end{aligned}$$

et les six qu'on en déduit par la permutation des lettres a et b.

318. Les deux premières donnent $\mu(a+b)$ et $\nu(a+b)$; en substituant ces expressions dans la cinquième, ou dans l'une des suivantes,

on trouve $\lambda(a+b)$. On obtient ainsi les formules

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda(a+b) = \dfrac{\lambda(a)\mu(b)\nu(b)+\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b) = \dfrac{\mu(a)\mu(b)-\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a+b) = \dfrac{\nu(a)\nu(b)-k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \end{cases}$$

relatives à l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Quand on connaît les valeurs des fonctions elliptiques pour les arguments a et b, elles donnent leurs valeurs pour un argument $a+b$ égal à la somme des deux premiers.

A l'aide de ces formules et de celles du n° 235, on peut, lorsque le module k est réel, positif et inférieur à l'unité, calculer les valeurs des fonctions elliptiques $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ pour une valeur imaginaire $z = x + yi$ attribuée à l'argument.

Les relations de seconde espèce conduisent encore plus rapidement à ces formules. Considérons, en effet, les trois équations (n° 310)

$$\theta_1(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0) = \theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta(x)\,\theta_1(x) + \theta_1(a)\,\theta(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$
$$\theta_2(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta(0) = \theta(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta(x) - \theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x),$$
$$\theta_3(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta(0) = \theta(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta(x) - \theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x),$$

et divisons chacune d'elles membre à membre par la quatrième équation du n° 309

$$\theta(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta^2(0) = \theta^2(a)\,\theta^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x),$$

nous obtiendrons immédiatement les formules (1).

319. Les formules précédentes, dans lesquelles on remplace b par $-b$, deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda(a-b) = \dfrac{\lambda(a)\mu(b)\nu(b)-\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a-b) = \dfrac{\mu(a)\mu(b)+\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a-b) = \dfrac{\nu(a)\nu(b)+k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}. \end{cases}$$

On en déduit un grand nombre de relations, parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda(a+b)+\lambda(a-b)=\dfrac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b)+\mu(a-b)=\dfrac{2\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a+b)+\nu(a-b)=\dfrac{2\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda(a+b)-\lambda(a-b)=\dfrac{2\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b)-\mu(a-b)=-\dfrac{2\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a+b)-\nu(a-b)=-\dfrac{2k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda(a+b)\lambda(a-b)=\dfrac{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b)\mu(a-b)=\dfrac{\frac{1}{k^2}\left[\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2\right]}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a+b)\nu(a-b)=\dfrac{k^2\mu^2(a)\mu^2(b)+k'^2}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \mu(a+b)\nu(a-b)+\mu(a-b)\nu(a+b)=\dfrac{2\mu(a)\nu(a)\mu(b)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b)\nu(a-b)-\mu(a-b)\nu(a+b)=\dfrac{-2k'^2\lambda(a)\lambda(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \lambda(a+b)\nu(a-b)+\lambda(a-b)\nu(a+b)=\dfrac{2\lambda(a)\nu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \lambda(a+b)\nu(a-b)-\lambda(a-b)\nu(a+b)=\dfrac{2\lambda(b)\nu(b)\mu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \lambda(a+b)\mu(a-b)+\lambda(a-b)\mu(a+b)=\dfrac{2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \lambda(a+b)\mu(a-b)-\lambda(a-b)\mu(a+b)=\dfrac{2\lambda(b)\mu(b)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}. \end{cases}$$

Le groupe (5) résulte immédiatement des relations du n° 309.

La première des équations (4) peut être mise sous la forme

$$(7)\qquad \lambda(a+b)-\lambda(a-b)=\frac{1}{k}\,D_a\log\frac{1+k\lambda(a)\lambda(b)}{1-k\lambda(a)\lambda(b)};$$

on a aussi

$$(8)\qquad \lambda^2(a+b)-\lambda^2(a-b)=-\frac{1}{k^2}\,D^2_{ab}\log[1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)].$$

Jacobi s'est servi de ces dernières formules pour trouver les développements des nos 285 et 286.

320. Si, dans les relations (3), on ajoute à a l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on obtient les neuf relations

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda(a+b)}+\frac{1}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(b)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)},\\
&\frac{1}{\mu(a+b)}+\frac{1}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\mu(a)\mu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{1}{\nu(a+b)}+\frac{1}{\nu(a-b)}=\frac{2\nu(a)\nu(b)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\mu(a+b)}{\nu(a+b)}+\frac{\mu(a-b)}{\nu(a-b)}=\frac{2\mu(a)\mu(b)\nu(a)\nu(b)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\nu(a+b)}{\mu(a+b)}+\frac{\nu(a-b)}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\mu(a)\mu(b)\nu(a)\nu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{\nu(a+b)}{\lambda(a+b)}+\frac{\nu(a-b)}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(a)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)},\\
&\frac{\lambda(a+b)}{\nu(a+b)}+\frac{\lambda(a-b)}{\nu(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(a)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\lambda(a+b)}{\mu(a+b)}+\frac{\lambda(a-b)}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{\mu(a+b)}{\lambda(a+b)}+\frac{\mu(a-b)}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (4) donneraient, de la même manière, neuf relations analogues aux précédentes.

321. *Remarque.* — Nous avons dit (n° 260) que le problème de la

transformation est de trouver une fonction y de x, telle que l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, où Y désigne un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré en y, se transforme en un autre de même forme $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X étant aussi un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré en x. La formule $\lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t)+\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}$, dans laquelle on regarde z comme une variable et t comme une constante, opère la transformation la plus simple. Si l'on pose, en effet, $x=\lambda(z)$, $y=\lambda(z+t)$, et que l'on représente par a la constante $\lambda(t)$, cette formule devient

$$(10)\qquad y = \frac{x\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}+a\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2a^2x^2}:$$

mais on a

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad d(z+t) = dz = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

d'où

$$(11)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Ainsi, quand on remplace y par sa valeur donnée par l'équation (10), la première expression différentielle se transforme en une autre tout à fait semblable. Cette fonction y de x est l'intégrale de l'équation différentielle (11), à laquelle on joint la condition initiale $y=a$ pour $x=0$.

La découverte d'Euler, à laquelle nous avons fait allusion au n° **270**, et qui a été le premier pas dans l'étude des fonctions elliptiques, consiste dans l'intégration, sous forme algébrique, de l'équation différentielle

$$(12)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

La formule de l'addition donne immédiatement cette intégrale; car, si l'on pose $x=\lambda(z,k)$, $y=\lambda(t,k)$, l'équation précédente se réduit

à $dz + dt = 0$; l'intégrale générale est $z + t = C$, ou bien

$$\lambda(z+t) = \lambda(C) = C',$$

C et C′ étant des constantes arbitraires. En développant $\lambda(z+t)$, d'après la formule (3), on obtient l'intégrale trouvée par Euler

$$(13)\qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C'.$$

Autre méthode.

322. On peut obtenir directement les formules de l'addition sans recourir aux propriétés des fonctions θ. La fonction

$$f(z) = \lambda(z+t) + \lambda(z-t),$$

dans laquelle on regarde t comme une constante et z comme la variable, est impaire et admet les périodes 2ω, ω', comme la fonction $\lambda(z)$. Elle est du quatrième ordre; car elle a quatre infinis dans chacun des parallélogrammes du réseau construit sur les périodes, savoir les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} - t$, $z = \omega + \frac{\omega'}{2} - t$ de $\lambda(z+t)$ et les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} + t$, $z = \omega + \frac{\omega'}{2} + t$ de $\lambda(z-t)$. Les quatre zéros sont 0, ω, $\frac{\omega'}{2}$, $\omega + \frac{\omega'}{2}$; les deux premiers sont les zéros, les deux derniers les infinis de $\lambda(z)$. On a d'ailleurs $f(\omega - z) = f(z)$. D'après le théorème du n° 160, cette fonction est égale à une fraction rationnelle du second degré en $\lambda(z)$. La fonction s'annulant quand $\lambda(z)$ devient infinie, le numérateur est du premier degré, le dénominateur du second degré; la fonction étant impaire, le numérateur est impair, le dénominateur pair. Le dénominateur, devant s'annuler pour les quatre valeurs de z, qui rendent $f(z)$ infinie, est de la forme

$$\left[\lambda(z) - \lambda\left(\frac{\omega'}{2} - t\right)\right]\left[\lambda(z) - \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)\right] = \lambda^2(z) - \lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + t\right);$$

on a donc

$$f(z) = \frac{A\lambda(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On déterminera la constante A en prenant la dérivée et faisant $z = 0$, ce qui donne

$$2\lambda'(t) = A\lambda'(0),$$

d'où

$$A = 2\mu(t)\nu(t).$$

On obtient ainsi

$$(14)\qquad \lambda(z+t) + \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(z)\mu(t)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En permutant les lettres z et t, on en déduit

$$(15)\qquad \lambda(z+t) - \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En ajoutant ces deux expressions membre à membre, on arrive à la formule

$$(16)\qquad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) + \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

323. La fonction paire

$$F(z) = \mu(z+t) + \mu(z-t),$$

qui admet les périodes 2ω, $\omega + \omega'$, comme la fonction $\mu(z)$, et a les quatre infinis $z = \pm\frac{\omega'}{2} \mp t$ des deux fonctions $\mu(z+t)$, $\mu(z-t)$, est aussi du quatrième ordre; les zéros sont $\pm\frac{\omega}{2}$ et $\pm\frac{\omega'}{2}$; les deux premiers sont les zéros, les deux derniers les infinis de $\mu(z)$. D'après le même théorème, cette fonction paire est égale à une fraction rationnelle du second degré en $\mu(z)$. La fonction s'annulant quand $\mu(z)$ devient infini, le numérateur est du premier degré, le dénominateur du second degré; la fonction s'annulant avec $\mu(z)$, le numéra-

teur ne contient pas de terme constant; on a donc

$$F(z) = \frac{A\mu(z)}{\left[\mu(z) - \mu\left(\frac{\omega'}{2} - t\right)\right]\left[\left(\mu(z) - \mu\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)\right]} = \frac{A'\mu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En faisant $z = 0$, on détermine la constante $A' = 2\mu(t)$. On obtient ainsi

$$(17) \qquad \mu(z+t) + \mu(z-t) = \frac{2\mu(z)\mu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Considérons maintenant la fonction impaire

$$\mu(z+t) - \mu(z-t),$$

qui admet les quatre zéros 0, ω, $\pm\frac{\omega+\omega'}{2}$, dont les deux premiers sont ceux de $\lambda(z)$, et les deux derniers ceux de $\nu(z)$. La fonction paire

$$\varphi(z) = \frac{\mu(z+t) - \mu(z-t)}{\lambda(z)\nu(z)},$$

qui admet les périodes ω, ω' et les deux infinis $z = \pm\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)$, est du second ordre par rapport à ces périodes; elle a un zéro double $z = \frac{\omega'}{2}$. Elle est donc égale à une fraction rationnelle du premier degré en $\lambda^2(z)$, et l'on a

$$\varphi(z) = \frac{A}{\lambda^2(z) - \lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)} = \frac{A'}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

d'où

$$\mu(z+t) - \mu(z-t) = \frac{A'\lambda(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

En prenant la dérivée et faisant $z = 0$, on trouve

$$2\mu'(t) = A'\lambda'(0),$$

d'où

$$A' = -2\lambda(t)\nu(t),$$

et par suite

$$(18)\qquad \mu(z+t)-\mu(z-t)=-\frac{2\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Des deux expressions précédentes, on déduit la formule

$$(19)\qquad \mu(z+t)=\frac{\mu(z)\mu(t)-\lambda(z)\lambda(t)\nu(z)\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On arrive, de la même manière, à la formule

$$(20)\qquad \nu(z+t)=\frac{\nu(z)\nu(t)-k^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z)\mu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Ce mode de démonstration des trois formules relatives à l'addition est dû à M. Liouville.

Addition des arguments dans les intégrales elliptiques de seconde espèce.

324. Nous avons trouvé (n° 273) l'expression de l'intégrale de seconde espèce par la fonction θ, savoir

$$\zeta(z)=\int_0^z \lambda^2(z)\,dz=\frac{1}{k^2}\left[z\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-\mathrm{D}_z\log\theta(z)\right].$$

En remplaçant, dans cette formule, z successivement par $z+t$ et par $z-t$, on a

$$\zeta(z+t)=\frac{1}{k^2}\left[(z+t)\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-\mathrm{D}_z\log\theta(z+t)\right],$$
$$\zeta(z-t)=\frac{1}{k^2}\left[(z-t)\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-\mathrm{D}_z\log\theta(z-t)\right],$$

d'où l'on déduit

$$(21)\qquad \zeta(z+t)+\zeta(z-t)-2\zeta(z)=-\frac{1}{k^2}\mathrm{D}_z\log\frac{\theta(z+t)\,\theta(z-t)}{\theta^2(z)}.$$

Pour transformer cette expression, nous nous servirons de la re-

lation

$$(22) \qquad \theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0) = \theta^2(t)\theta^2(z) - \theta_1^2(t)\theta_1^2(z),$$

qui est l'une de celles du n° 309, et qu'il est facile de trouver directement, en remarquant que la fonction

$$\frac{A\theta^2(z) + B\theta_1^2(z)}{\theta(z+t)\theta(z-t)}$$

admet les deux périodes ω et ω', et disposant des coefficients A et B de manière que le numérateur s'annule pour les valeurs $z = \frac{\omega'}{2} \pm t$ qui annulent le dénominateur; il suffit pour cela que ces coefficients satisfassent à la relation $A\theta_1^2(t) + B\theta^2(t) = 0$; la fonction est alors une constante; on détermine ensuite le coefficient A de manière qu'elle se réduise à l'unité pour $z = 0$, d'où $A\theta^2(0) = \theta^2(t)$ et, par suite, $B\theta^2(0) = -\theta_1^2(t)$. On a ainsi

$$\frac{\theta^2(t)\theta^2(z) - \theta_1^2(t)\theta_1^2(z)}{\theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0)} = 1,$$

ce qui est la relation cherchée.

De cette relation, on déduit

$$(23) \qquad \frac{\theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0)}{\theta^2(z)\theta^2(t)} = 1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t);$$

en remplaçant dans l'équation (21), on a

$$\zeta(z+t) + \zeta(z-t) - 2\zeta(z) = \frac{2\lambda^2(t)\lambda(z)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et, si l'on permute les lettres z et t,

$$\zeta(z+t) - \zeta(z-t) - 2\zeta(t) = \frac{2\lambda^2(z)\lambda(t)\mu(t)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On en conclut

$$(24) \qquad \zeta(z+t) = \zeta(z) + \zeta(t) + \lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t).$$

Quand le module k est réel, positif et plus petit que un, cette formule permet de calculer la valeur de la fonction $\zeta(z)$ pour une valeur imaginaire $x+yi$ attribuée à z.

Addition des arguments et des paramètres dans les intégrales de troisième espèce.

325. Addition des arguments. — De la formule

$$(25) \qquad \Pi(z,a) = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)},$$

trouvée au n° 275, on déduit

$$(26) \qquad \Pi(z+t,a) - \Pi(z,a) - \Pi(t,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(t+a)\theta(z+t-a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)\theta(z+t+a)}.$$

On peut transformer le second membre de plusieurs manières. Si, dans la deuxième équation de la troisième classe (n° 304), on fait $x=y=0$, il vient

$$\theta(a+z)\theta(b+z)\theta(a+b)\theta(0) = \theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b+z),$$

et, en remplaçant z par $-z$,

$$\theta(a-z)\theta(b-z)\theta(a+b)\theta(0) = \theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b-z) - \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b-z);$$

d'où

$$\frac{\theta(a+z)\theta(b+z)}{\theta(a-z)\theta(b-z)} = \frac{\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b-z) - \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b-z)}.$$

On en déduit

$$\frac{\theta(a+z)\theta(b+z)\theta(a+b-z)}{\theta(a-z)\theta(b-z)\theta(a+b+z)} = \frac{1+k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b+z)}{1-k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b-z)}$$

et, en remplaçant a, b, z par z, t, a,

$$(27) \qquad \frac{\theta(z+a)\theta(t+a)\theta(z+t-a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)\theta(z+t+a)} = \frac{1+k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t+a)}{1-k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t-a)}.$$

On a ainsi la formule trouvée par Legendre

$$(28)\quad \Pi(z+t,a)-\Pi(z,a)-\Pi(t,a)=\frac{1}{2}\log\frac{1+k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t+a)}{1-k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t-a)}.$$

326. L'équation (23), dans laquelle on remplace z et t successivement par $z+a$, $t+b$, et par $z-a$, $t-b$, devient

$$\frac{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(0)}{\theta^2(z+a)\theta^2(t+b)}=1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b),$$

$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(0)}{\theta^2(z-a)\theta^2(t-b)}=1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b);$$

on en déduit, en divisant membre à membre,

$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(z+a)\theta^2(t+b)}{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(z-a)\theta^2(t-b)}=\frac{1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)}{1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)}$$

et, en permutant les lettres a et b,

$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(z+b)\theta^2(t+a)}{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(z-b)\theta^2(t-a)}=\frac{1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)}{1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)}.$$

En multipliant les deux dernières équations membre à membre, on a

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\theta^2(z+a)\theta^2(z+b)\theta^2(t+a)\theta^2(t+b)\theta^2(z+t-a-b)}{\theta^2(z-a)\theta^2(z-b)\theta^2(t-a)\theta^2(t-b)\theta^2(z+t+a+b)}\\ &\quad=\frac{[1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)][1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)][1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)]}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $b=0$, cette équation se simplifie et devient

$$(30)\quad \frac{\theta^2(z+a)\theta^2(t+a)\theta^2(z+t-a)}{\theta^2(z-a)\theta^2(t-a)\theta^2(z+t+a)}=\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+a)]}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(31)\quad \Pi(z+t,a)-\Pi(z,a)-\Pi(t,a)=\frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+a)]}.$$

327. Addition des paramètres. — En effectuant la permutation du paramètre et de l'argument, d'après l'équation (27) du n° 277, on a

$$\Pi(z,a+b)-\Pi(a+b,z)=k^2[(a+b)\zeta(z)-z\zeta(a+b)].$$

En remplaçant $\Pi(a+b,\ z)$ et $\zeta(a+b)$ par leurs valeurs tirées des équations (26) et (24), on arrive à l'équation

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(z,\ a+b) - \Pi(z,\ a) - \Pi(z,\ b) \\ &= -k^2 z \lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(z+b)\theta(z-a-b)}{\theta(z-a)\theta(z-b)\theta(z+a+b)}, \end{aligned}\right.$$

qui, à l'aide des relations (27) ou (30), se met sous les deux formes

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(z,\ a+b) - \Pi(z,\ a) - \Pi(z,\ b) \\ &= -k^2 z\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{2}\log\frac{1+k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b+z)}{1-k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b-z)} \\ &= -k^2 z\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(b)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z-b)]}{[1-k^2\lambda^2(b)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z+b)]}. \end{aligned}\right.$$

328. Formules générales. — Proposons-nous enfin de calculer la fonction $\Pi(z+t,\ a+b)$. Si, dans l'équation (32), on remplace z par $z+t$, qu'on substitue ensuite à $\Pi(z+t,\ a)$ et à $\Pi(z+t,\ b)$ leurs valeurs tirées de l'équation (26), il vient

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(z+t,\ a+b) - \Pi(z,a) - \Pi(z,b) - \Pi(t,a) - \Pi(t,b) \\ &= -k^2(z+t)\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(z+b)\theta(t+a)\theta(t+b)\theta(z+t-a-b)}{\theta(z-a)\theta(z-b)\theta(t-a)\theta(t-b)\theta(z+t+a+b)}, \end{aligned}\right.$$

et, en vertu de la relation (29),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(z+t,\ a+b) - \Pi(z,a) - \Pi(z,b) - \Pi(t,a) - \Pi(t,b) \\ &= -k^2(z+t)\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) \\ &\quad + \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)][1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)][1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)]}. \end{aligned}\right.$$

A l'aide de cette formule, le calcul de la fonction $\Pi(z,\ a)$, quand on attribue à l'argument et au paramètre des valeurs imaginaires quelconques, est ramené aux cas où ces deux quantités sont réelles, ou imaginaires et de la forme αi.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT.

329. Nous avons vu (n° 75) que les quatre fonctions θ satisfont aux relations

$$(1)\qquad \frac{\theta(z+\omega)}{\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+\omega)}{-\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+\omega)}{-\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+\omega)}{\theta_3(z)} = 1,$$

$$(2)\qquad \frac{\theta(z+\omega')}{-\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+\omega')}{-\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+\omega')}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+\omega')}{\theta_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')},$$

$$(3)\qquad \frac{\theta(z+n\omega')}{(-1)^n\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+n\omega')}{(-1)^n\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+n\omega')}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+n\omega')}{\theta_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')},$$

$$(4)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{-\theta_1(z)} = 1,$$

$$(5)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta_1(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$(6)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{-i\theta(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{i\theta_1(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}.$$

Nous nous servirons aussi, dans ce Chapitre, de quatre des relations du n° 309, savoir

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta(z+a)\,\theta(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_1^2(a)\,\theta_1^2(z),\\ \theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta^2(z) + \theta^2(a)\,\theta_1^2(z),\\ \theta_2(z+a)\,\theta_2(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(z),\\ \theta_3(z+a)\,\theta_3(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(z). \end{aligned}\right.$$

Multiplication par un nombre impair.

330. La fonction $\theta_1(nz)$ admet les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + m'\frac{\omega'}{n}$, m et m' étant des nombres entiers quelconques; elle satisfait aux relations

$$\theta_1(nz + n\omega) = -\theta_1(nz),$$
$$\theta_1(nz + n\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}\theta_1(nz).$$

La fonction

$$f_1(z) = \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

formée par le produit des n^2 fonctions $\theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant n valeurs entières consécutives à chacun des nombres p et q, admet les mêmes zéros et satisfait aux relations

$$f_1(z + \omega) = -f_1(z),$$
$$f_1(z + \omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2n^2 z + n^2\omega' + 2\Sigma\left(p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)\right]}f_1(z).$$

Si l'on attribue à chacun des nombres p et q les n valeurs consécutives

$$-\frac{n-1}{2}, \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \ldots, \quad \frac{n-1}{2},$$

les n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$ étant égales deux à deux et de signes contraires, leur somme est nulle, et la relation précédente se réduit à

$$f_1(z + \omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}f_1(z).$$

De cette manière, le rapport $\frac{\theta_1(nz)}{f_1(z)}$, admettant les deux périodes ω, ω' et restant holomorphe pour toutes les valeurs de z, est une constante A_1 (n° **146**), et l'on a

$$\theta_1(nz) = A_1 \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Nous mettrons à part le facteur $\theta_1(z)$, qui correspond à $p=0$, $q=0$; puis nous combinerons, avec la valeur $p=0$, les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de q, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de p les n valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}$ de q; si l'on appelle a l'une quelconque des $\frac{n^2-1}{2}$ valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$ ainsi obtenues, les autres valeurs étant respectivement égales aux précédentes et de signes contraires, on aura

$$\theta_1(nz) = n\theta_1(z) \prod \frac{\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)}{\theta_1^2(a)}.$$

En remplaçant le produit $\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)$ par la valeur donnée par la seconde des relations (7), il vient

$$(8) \qquad \theta_1(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = n\theta_1(z) \prod \left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a)}{\theta_1^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

331. Les zéros de la fonction $\theta(nz)$ sont compris dans la formule $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$, que l'on peut mettre sous la forme $z = \frac{\omega'}{2} + m\frac{\omega}{n} + m'_1\frac{\omega'}{n}$, puisque n est impair, m et m'_1 étant des nombres entiers quelconques; ils sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f(z) = \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

formée par le produit des n^2 fonctions $\theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant à p et à q les mêmes valeurs que précédemment; d'ailleurs ces deux fonctions satisfont aux relations

$$\frac{\theta(nz+n\omega)}{\theta(nz)} = \frac{f(z+\omega)}{f(z)} = 1,$$

$$\frac{\theta(nz+n\omega')}{\theta(nz)} = \frac{f(z+\omega')}{f(z)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2z+n^2\omega')};$$

elles sont donc dans un rapport constant, et l'on a

$$\theta(nz) = A \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right).$$

En combinant les facteurs comme précédemment, il vient

$$\theta(nz) = \theta(z) \prod \frac{\theta(z+a)\theta(z-a)}{\theta^2(a)}$$

et, en vertu de la première des relations (7),

$$(9) \qquad \theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta(z) \prod \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_1^2(a)}{\theta^2(a)}\theta_1^2(z)\right].$$

On trouve, de la même manière,

$$(10) \qquad \theta_2(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta_2(z) \prod \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2(a)}{\theta_2^2(a)}\theta_1^2(z)\right],$$

$$(11) \qquad \theta_3(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta_3(z) \prod \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_2^2(a)}{\theta_3^2(a)}\theta_1^2(z)\right].$$

332. Les formules précédentes, appliquées aux fonctions Al de M. Weierstrass, donnent

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{Al}(nz) &= \mathrm{Al}(z) \prod [\mathrm{Al}^2(z) - k^2\lambda^2(a)\,\mathrm{Al}_1^2(z)],\\
\mathrm{Al}_1(nz) &= n\,\mathrm{Al}_1(z) \prod \left[\mathrm{Al}^2(z) - \frac{1}{\lambda^2(a)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_2(nz) &= \mathrm{Al}_2(z) \prod \left[\mathrm{Al}^2(z) - \frac{\nu^2(a)}{\mu^2(a)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_3(nz) &= \mathrm{Al}_3(z) \prod \left[\mathrm{Al}^2(z) - k^2\frac{\mu^2(a)}{\nu^2(a)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right].
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres sont homogènes et du degré n^2 par rapport aux quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$. On en déduit

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Al}(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \prod [1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)] = \mathrm{P},\\
\frac{\mathrm{Al}_1(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= n\lambda(z) \prod \left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a)}\right] = \lambda(z)\,\mathrm{P}_1,\\
\frac{\mathrm{Al}_2(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \mu(z) \prod \left[1 - \frac{\nu^2(a)}{\mu^2(a)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\,\mathrm{P}_2,\\
\frac{\mathrm{Al}_3(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \nu(z) \prod \left[1 - k^2\frac{\mu^2(a)}{\nu^2(a)}\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\,\mathrm{P}_3,
\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(14)\qquad \lambda(nz) = \frac{\lambda(z)\,\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}},\quad \mu(nz) = \frac{\mu(z)\,\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}},\quad \nu(nz) = \frac{\nu(z)\,\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}}.$$

Les lettres P désignent des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, et du degré $n^2 - 1$.

Multiplication par un nombre pair.

333. Considérons d'abord la fonction $\theta_3(nz)$, dont les zéros $z = (2m+1)\frac{\omega}{2n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_3(z) = \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right],$$

où p et q reçoivent n valeurs entières consécutives. Si l'on attribue à $2p+1$ et à $2q+1$ les n valeurs impaires consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, les n^2 quantités $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ étant égales deux à deux et de signes contraires, leur somme est nulle, et l'on a

$$\frac{\theta_3(nz + n\omega')}{\theta_3(nz)} = \frac{f_3(z+\omega')}{f_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}.$$

La fonction holomorphe $\frac{\theta_3(nz)}{f_3(z)}$, admettant les deux périodes ω, ω', est une constante, et l'on a

$$\theta_3(nz) = \mathrm{A}_3 \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega}{2n}\right].$$

Si l'on combine avec les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2p+1$ les n valeurs de $2q+1$ et si l'on désigne par a_3 l'une quelconque des $\frac{n^2}{2}$ quantités $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ ainsi obtenues, il vient

$$\frac{\theta_3(nz)}{\theta_3(0)} = \prod \frac{\theta_1(z+a_3)\,\theta_1(z-a_3)}{\theta_1^2(a_3)},$$

et, en vertu de la seconde des relations (7),

$$(15) \qquad \frac{\theta_1(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta_3(0)} = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a_3)}{\theta_1^2(a_3)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

334. Les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ de la fonction $\theta(nz)$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f(z) = \prod\theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right),$$

où n valeurs entières consécutives de l'une des lettres p et q correspondent à chacune des n valeurs entières consécutives de l'autre. Nous attribuerons à $2q+1$ les n valeurs impaires consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, et à p d'abord les $n-1$ valeurs consécutives $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{n}{2}-1\right)$, puis la valeur $\frac{n}{2}$ avec les valeurs positives de $2q+1$, et la valeur $-\frac{n}{2}$ avec les valeurs négatives de $2q+1$; de cette manière, les n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ seront encore égales deux à deux et de signes contraires, et l'on aura

$$\theta(nz) = A\prod\theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right).$$

Si l'on combine avec les valeurs $p = 0$ et $p = \frac{n}{2}$ les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2q+1$, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$ de p les n valeurs de $2q+1$, et si l'on désigne par a les $\frac{n^2}{2}$ valeurs correspondantes de $p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$, il vient

$$\frac{\theta(nz)}{\theta(0)} = \prod\frac{\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)}{\theta_1^2(a)},$$

et par suite

$$(16) \qquad \theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a)}{\theta_1^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

335. Les zéros de la fonction $\theta_2(nz)$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_2(z) = \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}\right],$$

où nous attribuons à $2p+1$ les n valeurs consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, et à q d'abord les $n-1$ valeurs consécutives $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{n}{2}-1\right)$, puis la valeur $\frac{n}{2}$ avec les valeurs positives de $2p+1$ et la valeur $-\frac{n}{2}$ avec les valeurs négatives de $2p+1$; on a, comme précédemment,

$$\theta_2(nz) = A_2 \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}\right].$$

Si l'on combine avec les valeurs $q=0$ et $q=\frac{n}{2}$ les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2p+1$, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$ de q les n valeurs de $2p+1$, et si l'on désigne par a_2 les valeurs correspondantes de $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}$, il vient

$$\frac{\theta_2(nz)}{\theta_2(0)} = \prod \frac{\theta_1(z+a_2)\,\theta_1(z-a_2)}{\theta_1^2(a_2)},$$

et par suite

$$(17)\qquad \frac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta_2(0)} = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a_2)}{\theta_1^2(a_2)}\theta_1^2(z)\right].$$

336. Considérons enfin la fonction $\theta_1(nz)$ dont les zéros sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_1(z) = \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

dans laquelle p et q reçoivent les n^2 couples de valeurs entières com-

pris dans le tableau suivant :

$$p=0,\quad q=0;\quad p=\frac{n}{2},\ q=0;\quad p=0,\ q=\frac{n}{2};\quad p=-\frac{n}{2},\ q=-\frac{n}{2};$$

$$p=0,\quad q=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$q=0,\quad p=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

[illegible] $q=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$

$$p=-\frac{n}{2},\ q=-1,\ -2,\ldots,\ -\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$q=\frac{n}{2},\quad p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$q=-\frac{n}{2},\ p=-1,\ -2,\ldots,\ -\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$p=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\left(\frac{n}{2}-1\right),\quad q=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\left(\frac{n}{2}-1\right).$$

De cette manière, la somme des n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$ est nulle, et l'on a

$$\theta_1(nz)=A_1\prod\theta_1\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Les quatre premières combinaisons donnent les quatre facteurs $\theta_1(z)$, θ_2[illegible] $\theta(z)$, $\theta_3(z)$. Les autres valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$ sont égal[illegible]deux à deux et de signes contraires; en ne prenant que la moitié des [illegible]binaisons, savoir :

$$p=0,\ \frac{n}{2},\quad q=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$q=0,\ \frac{n}{2},\quad p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1,\quad q=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

et désignant par a_1 les valeurs correspondantes de $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$, on aura

$$\theta_1(nz)=\frac{n\theta_1(z)\theta(z)\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta(0)\theta_2(0)\theta_3(0)}\prod\frac{\theta_1(z+a_1)\theta_1(z-a_1)}{\theta_1^2(a_1)},$$

et par suite

$$(18)\quad \theta_1(nz)\theta^{n^2-3}(0)\theta_2(0)\theta_3(0)=n\theta(z)\theta_1(z)\theta_2(z)\theta_3(z)\prod\left[\theta^2(z)-\frac{\theta^2(a_1)}{\theta_1^2(a_1)}\theta_1^2(z)\right].$$

337. Ces formules, appliquées aux fonctions Al, donnent

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{Al}(nz)&=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_1(nz)&=n\,\mathrm{Al}(z)\,\mathrm{Al}_1(z)\,\mathrm{Al}_2(z)\,\mathrm{Al}_3(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_1)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_2(nz)&=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_2)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_3(nz)&=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_3)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right].
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres sont homogènes et du degré n^2 par rapport aux quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$. On en déduit

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Al}(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}&=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a)}\right]=\mathrm{P},\\
\frac{\mathrm{Al}_1(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}&=n\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_1)}\right]=\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\mathrm{P}_1,\\
\frac{\mathrm{Al}_2(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}&=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_2)}\right]=\mathrm{P}_2,\\
\frac{\mathrm{Al}_3(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}&=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_3)}\right]=\mathrm{P}_3,
\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(21)\qquad \lambda(nz)=\frac{\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}},\quad \mu(nz)=\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}},\quad \nu(nz)=\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}}.$$

Les lettres P désignent des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$; le polynôme P_1 est du degré n^2-4, les trois autres du degré n^2.

Méthode de calcul d'Abel.

338. Les quatre polynômes P renferment des systèmes de constantes telles que $\lambda(a)$, dont nous ne connaissons pas la valeur; mais on peut obtenir ces polynômes par un calcul de proche en proche, imaginé par Abel. De la première des relations du n° 310, et des quatrième, huitième et douzième relations du n° 309 on déduit, en remplaçant x et a par nz,

$$(22)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}_1(2nz) = 2\,\mathrm{Al}_1(nz)\,\mathrm{Al}(nz)\,\mathrm{Al}_2(nz)\,\mathrm{Al}_3(nz), \\ \mathrm{Al}\,(2nz) = \mathrm{Al}^4(nz) - k^2\mathrm{Al}_1^4(nz), \\ \mathrm{Al}_2(2nz) = \mathrm{Al}_2^4(nz) - k'^2\mathrm{Al}_1^4(nz), \\ \mathrm{Al}_3(2nz) = \mathrm{Al}_3^4(nz) + k^2k'^2\mathrm{Al}_1^4(nz). \end{cases}$$

Des première, quatrième, huitième et douzième relations du n° 309, on déduit de même, en remplaçant x et a par $(n+1)z$ et nz,

$$(23)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}_1[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_1(z) = \mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}^2(nz) - \mathrm{Al}^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz), \\ \mathrm{Al}\,[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}\,(z) = \mathrm{Al}^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}^2(nz) - k^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz), \\ \mathrm{Al}_2[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_2(z) = \mathrm{Al}_2^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_2^2(nz) - k'^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz), \\ \mathrm{Al}_3[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_3(z) = \mathrm{Al}_3^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_3^2(nz) + k^2k'^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz). \end{cases}$$

Faisons d'abord $n = 1$, les équations (22) donnent les quatre fonctions $\mathrm{Al}(2z)$; en les substituant dans les équations (23) et remarquant que les seconds membres sont divisibles respectivement par $\mathrm{Al}_1^2(z)$, $\mathrm{Al}^2(z), \ldots$, on obtient, pour les quatre fonctions $\mathrm{Al}(3z)$, des expressions entières contenant en facteur la fonction $\mathrm{Al}(z)$ correspondante. En faisant $n = 2$, on obtiendra ensuite $\mathrm{Al}(4z)$ et $\mathrm{Al}(5z)$, et ainsi de suite. D'après ce mode de calcul, il est évident que les coefficients des polynômes, tels qu'ils se présentent, sont des fonctions entières de k^2, ayant elles-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Si l'on remplace $\mathrm{Al}_2^2(z)$ par $\mathrm{Al}^2(z) - \mathrm{Al}_1^2(z)$ et $\mathrm{Al}_3^2(z)$ par $\mathrm{Al}^2(z) - k^2\mathrm{Al}_1^2(z)$, les coefficients conservent les mêmes propriétés. On pourrait aussi déduire de cette méthode de calcul les degrés des polynômes.

Une fois qu'on a trouvé de cette façon les expressions homogènes des quatre fonctions $\mathrm{Al}(nz)$, en les divisant par $\mathrm{Al}^{n^2}(z)$, on en déduit celles des quatre polynômes P. Ces polynômes entiers P, ordonnés par rapport aux puissances de $\lambda^2(z)$, ont pour coefficients des fonctions entières de k^2, ayant elles-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Si l'on remplace $\lambda^2(z)$ par $1-\mu^2(z)$ et que l'on ordonne les polynômes P par rapport aux puissances de $\mu^2(z)$, les coefficients jouiront des mêmes propriétés; mais, si l'on remplace $\lambda^2(z)$ par $\frac{1-\nu^2(z)}{k^2}$ et que l'on ordonne les polynômes par rapport aux puissances de $\nu^2(z)$, les coefficients cesseront d'être entiers en k^2; chacun d'eux sera égal à une fonction entière de k^2 divisée par une puissance de k^2, au plus égale à l'exposant de $\nu^2(z)$.

Voici quelques propriétés de ces polynômes; représentons-les par

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \Sigma A^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C^{(m)}\nu^{2m}(z),\\ P_1 &= \Sigma A_1^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_1^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_1^{(m)}\nu^{2m}(z),\\ P_2 &= \Sigma A_2^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_2^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_2^{(m)}\nu^{2m}(z),\\ P_3 &= \Sigma A_3^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_3^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_3^{(m)}\nu^{2m}(z). \end{aligned}\right.$$

Concevons que l'on remplace k par $\frac{1}{k}$ et z par kz. D'après les relations du n° **234**, la fonction $\lambda(z)$ se change en $k\lambda(z)$, et les fonctions $\mu(z)$ et $\nu(z)$ se permutent. En vertu des relations (9) du n° **288**, les expressions (13) ou (20) des polynômes P au moyen des Al montrent que les polynômes P et P_1 ne changent pas, tandis que les polynômes P_2 et P_3 se permutent. D'après cela, les coefficients de ces polynômes doivent satisfaire aux relations

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &A^{(m)}(k) = k^{2m}A^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C^{(m)}(k) = B^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\\ &A_1^{(m)}(k) = k^{2m}A_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_1^{(m)}(k) = B_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\\ &A_3^{(m)}(k) = k^{2m}A_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_3^{(m)}(k) = B_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_2^{(m)}(k) = B_3^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}\right.$$

On en conclut que les coefficients $A^{(m)}$, $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, $A_3^{(m)}$, $B^{(m)}$, $B_1^{(m)}$, $B_2^{(m)}$, $B_3^{(m)}$, qui sont des polynômes entiers en k^2, sont au plus du degré m par

rapport à k^2. Le coefficient $A^{(m)}$ est un polynôme réciproque en k; de même $A_1^{(m)}$. Le coefficient $A_3^{(m)}$ se déduit de $A_2^{(m)}$, et, par conséquent, P_3 de P_2.

Méthode de calcul de Jacobi.

339. La méthode d'Abel donne les polynômes P par un calcul de proche en proche. On obtient directement l'un quelconque d'entre eux à l'aide d'une équation aux dérivées partielles due à Jacobi. Nous avons vu (n° 290) que les quatre fonctions

$$u = \mathrm{Al}(z), \quad u_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1(z), \quad u_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2(z), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3(z)$$

satisfont à la même équation aux dérivées partielles

$$(26)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial u}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial u}{\partial k} + k^2 z^2 u = 0,$$

dans laquelle on suppose le multiplicateur g égal à l'unité. En remplaçant z par nz, on en conclut que les quatre fonctions

$$\mathrm{U} = \mathrm{Al}(nz), \quad \mathrm{U}_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1(nz), \quad \mathrm{U}_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2(nz), \quad \mathrm{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3(nz)$$

satisfont à l'équation

$$(27)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2} + 2n^2 k^2 z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + 2n^2 kk'^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial k} + n^4 k^2 z^2 \mathrm{U} = 0.$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

on peut mettre les deux équations sous la forme

$$(28)\quad \frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 + 2k^2 z\frac{\partial \log u}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \log u}{\partial k} + k^2 z^2 = 0,$$

$$(29)\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{U}}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial z}\right)^2 + 2n^2 k^2 z\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial z} + 2n^2 kk'^2\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial k} + n^4 k^2 z^2 = 0.$$

Considérons les quatre fonctions

$$V = \frac{U}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_1 = \frac{U_1}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_2 = \frac{U_2}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_3 = \frac{U_3}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)},$$

que l'on obtient en divisant les quatre fonctions U par la même quantité $\mathrm{Al}^{n^2}(z)$. Si l'on remplace l'une quelconque des fonctions U par sa valeur Vu^{n^2} dans l'équation (29), et si l'on tient compte de l'équation (28), on a

$$\frac{\partial^2 \log V}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log V}{\partial z}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k'^2 z\right)\frac{\partial \log V}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial \log V}{\partial k} - n^2(n^2-1)\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} = 0,$$

et en mettant à la place de $\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2}$ sa valeur $-k^2\lambda^2(z)$ (nº **287**),

$$(30)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k'^2 z\right)\frac{\partial V}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{dk} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2(z)V = 0.$$

340. Posons maintenant $x = \frac{u_1}{u} = \sqrt{k}\lambda(z, k)$, et regardons V comme une fonction des deux variables indépendantes x et k; comme on a

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial k} = \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial k},$$

l'équation (30) devient

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k'^2 z^2\right)\frac{\partial x}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial x}{\partial k}\right]\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux fonctions u et u_1 satisfaisant à l'équation (28), on en déduit, par soustraction,

$$\frac{\partial^2 \log \frac{u_1}{u}}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u_1}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 + 2k'^2 z \frac{\partial \log \frac{u_1}{u}}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \log \frac{u_1}{u}}{\partial k} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log x}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log x}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial \log x}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \log x}{\partial k} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial x}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial x}{\partial k} = 0.$$

Grâce à cette relation, le coefficient du second terme, dans l'équation (31), se simplifie, et l'équation devient

$$(32) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (n^2 - 1)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial x} + 2n^2 kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0.$$

En remplaçant $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ par leurs valeurs

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = k\lambda'^2(z) = k\left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)x^2 + x^4\right],$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = k\left[-\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 2x^3\right],$$

on arrive enfin à l'équation différentielle

$$(33) \quad \left\{\begin{aligned} &\left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)x^2 + x^4\right]\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (n^2-1)\left[\left(k + \frac{1}{k}\right)x - 2x^3\right]\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 2n^2k'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)x^2 V = 0. \end{aligned}\right.$$

On la simplifie un peu en remplaçant la variable k par la nouvelle variable $\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$; l'équation devient

$$(34) \quad \left\{\begin{aligned} &(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2(n^2-1)(\alpha x - x^3)\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 4n^2(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha} + n^2(n^2-1)x^2 V = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quatre fonctions V satisfont à cette même équation différentielle.

341. Supposons qu'au lieu de la variable $x = \frac{u_1}{u}$ on prenne la va-

riable $y = \frac{u_2}{u} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mu(z, k)$, la transformation de l'équation (30) s'opérera de la même manière : il suffit, dans les calculs, de remplacer u_1 par u_2 et x par y; on arrivera donc à l'équation

$$(35)\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial y} + 2n^2kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0,$$

analogue à l'équation (32). Mais on a (n° 159)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{k}{k'}\mu'^2(z) = kk'\left(1 - \frac{1-2k^2}{kk'}y^2 - y^4\right),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -kk'\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y + 2y^3\right),$$

et l'équation (35) devient

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1-2k^2}{kk'}y^2 - y^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (n^2-1)\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y + 2y^3\right)\frac{\partial V}{\partial y} \\ &\qquad + 2n^2k'\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)\left(\frac{k}{k'} - y^2\right)V = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut encore effectuer la même transformation en se servant de la variable $t = \frac{u_3}{u} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\nu(z, k)$; on obtient l'équation

$$(37)\qquad \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial t} + 2n^2kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0,$$

que l'on déduit de l'équation (32) en remplaçant x par t. Comme on a

$$\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{k'}\nu'^2(z) = -k' + (2-k^2)t^2 - k't^4,$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = (2-k^2)t - 2k't^3,$$

l'équation devient

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(1 - \frac{2-k^2}{k'}t^2 + t^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (n^2-1)\left(\frac{2-k^2}{k'}t - 2t^3\right)\frac{\partial V}{\partial t} \\ &\qquad - 2n^2kk'\frac{\partial V}{\partial k} - n^2(n^2-1)\left(\frac{1}{k'} - t^2\right)V = 0. \end{aligned}\right.$$

342. Voici comment on peut, à l'aide de ces équations différentielles, calculer les polynômes P. Nous avons substitué aux variables λ, μ, ν les nouvelles variables

$$(39)\quad x=\sqrt{k}\,\lambda(z)=\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)},\quad y=\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mu(z)=\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)},\quad t=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\nu(z)=\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)},$$

et nous avons considéré les quatre fonctions

$$(40)\quad \begin{cases} V=\dfrac{\theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & V_1=\dfrac{\theta_1(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, \\ V_2=\dfrac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & V_3=\dfrac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}. \end{cases}$$

Si, pour les quatre polynômes P, on pose

$$(41)\quad A^{(m)}=k^m a^{(m)},\quad B^{(m)}=\left(\frac{k}{k'}\right)^m b^{(m)},\quad C^{(m)}=\frac{1}{k'^m}\,c^{(m)},$$

les formules (24) deviennent

$$(42)\quad \begin{cases} P=\Sigma a^{(m)}x^{2m}=\Sigma b^{(m)}y^{2m}=\Sigma c^{(m)}t^{2m}, \\ P_1=\Sigma a_1^{(m)}x^{2m}=\Sigma b_1^{(m)}y^{2m}=\Sigma c_1^{(m)}t^{2m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et les coefficients $a^{(m)}$ satisfont aux relations

$$(43)\quad a^{(m)}(k)=a^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\quad a_1^{(m)}(k)=a_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\quad a_2^{(m)}(k)=a_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Les coefficients $A^{(m)}$ et $A_1^{(m)}$ étant des polynômes entiers et réciproques en k du degré $2m$ au plus, les nouveaux coefficients $a^{(m)}$ et $a_1^{(m)}$ sont des polynômes entiers en α et du degré m au plus.

D'après les premières des équations (13) et (20), le polynôme P est, dans tous les cas, égal à la fonction V; c'est un polynôme entier pair en x, du degré n^2-1 ou n^2; on le calculera à l'aide de l'équation aux dérivées partielles (34). Si, dans cette équation, on remplace V par sa valeur $\Sigma a^{(m)}x^{2m}$, et que l'on égale à zéro l'ensemble des termes du degré

$2m$ en x, on obtient une relation linéaire

$$(44)\quad \begin{cases} (2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 4m(n^2-2m)\alpha a^{(m)} \\ \qquad + 4n^2(1-\alpha^2)\dfrac{da^{(m)}}{d\alpha} + (n^2-2m+1)(n^2-2m+2)a^{(m-1)} = 0 \end{cases}$$

entre trois coefficients consécutifs. Le premier coefficient $a^{(0)}$ est égal à 1; en faisant $m=0$, on trouve $a^{(1)}=0$; en faisant $m=1$, on trouve $a^{(2)} = -\dfrac{n^2(n^2-1)}{3.4}$, puis $a^{(3)} = \dfrac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)\alpha}{3.5.6}$, et ainsi de suite.

343. Nous allons maintenant distinguer deux cas, suivant que n est impair ou pair. Lorsque n est impair, d'après les équations (13), on a

$$(45)\qquad V = P,\quad V_1 = xP_1,\quad V_2 = yP_2,\quad V_3 = tP_3.$$

Il est évident que les quantités P, qui sont des polynômes entiers en $\lambda^2(z)$, sont des fonctions de z doublement périodiques, aux périodes ω, ω', et de l'ordre n^2-1; elles sont représentées par les formules

$$(46)\quad \begin{cases} P(z) = \dfrac{\theta(nz)\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & P_1(z) = \dfrac{\theta_1(nz)\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_1(z)\theta^{n^2-1}(z)}, \\ P_2(z) = \dfrac{\theta_2(nz)\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_2(z)\theta^{n^2-1}(z)}, & P_3(z) = \dfrac{\theta_3(nz)\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_3(z)\theta^{n^2-1}(z)}, \end{cases}$$

que l'on déduit des formules (40), et elles satisfont aux relations

$$(47)\quad \begin{cases} \dfrac{P\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{P_1(z)} = \dfrac{P_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_1(z)} = \dfrac{1}{t^{n^2-1}}, \\ \dfrac{P\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_1(z)} = \dfrac{P_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \dfrac{1}{x^{n^2-1}}, \\ \dfrac{P\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{P_2(z)} = \dfrac{P_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_3(z)} = \dfrac{1}{y^{n^2-1}}. \end{cases}$$

Mais, quand on remplace z par $z + \frac{\omega}{2}$, t se change en $\frac{1}{t}$; quand on remplace z par $z + \frac{\omega'}{2}$, x se change en $\frac{1}{x}$; enfin, quand on remplace z par $z + \frac{\omega + \omega'}{2}$, y se change en $\frac{-i}{y}$. Il en résulte que, si l'on regarde les polynômes P comme des fonctions de l'une des variables x, y, z, on aura les relations

$$(48)\quad P_1(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n^2-1} P\left(\frac{1}{x}\right), \quad P_2(y) = y^{n^2-1} P\left(\frac{-i}{y}\right), \quad P_3(t) = t^{n^2-1} P\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, une fois qu'on a calculé le polynôme P, ordonné par rapport aux puissances de x, on en déduit immédiatement le polynôme P_1 ordonné aussi par rapport à x; le coefficient du terme en x^2 dans P étant nul, celui du terme en x^{n^2-3} dans P_1 est aussi nul. Si maintenant on ordonne le polynôme P par rapport à y ou à t, après avoir remplacé x^2 par sa valeur $k - k'y^2$ ou $\frac{1 - k't^2}{k}$, on obtient $P_2(y)$ et $P_3(t)$.

On a aussi les relations

$$(49)\quad P_3(x) = x^{n^2-1} P_2\left(\frac{1}{x}\right), \quad P_3(y) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} y^{n^2-1} P_1\left(\frac{-i}{y}\right), \quad P_2(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} t^{n^2-1} P_1\left(\frac{1}{t}\right).$$

La première donne $P_3(x)$, quand on connaît $P_2(x)$; on en déduit $a_3^{(m)} = a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2} - m\right)}$, et, en vertu de la troisième des relations (43), $a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2} - m\right)}(k) = a_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right)$, $a_3^{\left(\frac{n^2-1}{2} - m\right)}(k) = a_3^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right)$; les coefficients numériques des termes également éloignés des extrêmes dans les polynômes $P_2(x)$ ou $P_3(x)$ sont donc égaux entre eux. Il suffirait, d'après cela, pour avoir les quatre polynômes, de calculer directement la moitié des coefficients de l'un des polynômes $P_2(x)$ ou $P_3(x)$, à l'aide de l'équation (34).

On connaît les premiers coefficients a; les premières des relations (48) et (49) donnent les derniers. Quand, dans l'un des polynômes $P(x)$, on remplace x^2 par $k - k'y^2$ ou par $\frac{1 - k't^2}{k}$, le coefficient de la plus haute puissance de y ou de t est égal au coefficient de la plus haute

puissance de x multiplié par $k'^{\frac{n^2-1}{2}}$ ou par $\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}$. Connaissant de la sorte les derniers coefficients b et c, les deuxièmes et troisièmes des relations (48) et (49) donnent les premiers. On a ainsi

$$
(50)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{a^{(0)}}{1} = \frac{a_1^{(0)}}{n} = \frac{a_2^{(0)}}{1} = \frac{a_3^{(0)}}{1} = \frac{a^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \frac{a_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \frac{a_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = 1,\\
&\frac{b^{(0)}}{1} = \frac{b_1^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{b_2^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \frac{b_3^{(0)}}{1}\\
&\quad = \frac{b^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \frac{b_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{b_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \frac{b_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = k'^{\frac{n^2-1}{4}},\\
&\frac{c^{(0)}}{1} = \frac{c_1^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{c_2^{(0)}}{1} = \frac{c_3^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}\\
&\quad = \frac{c^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \frac{c_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{c_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \frac{c_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

La connaissance du dernier coefficient, $a^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$, servira de vérification dans le calcul de P.

En appliquant cette méthode au cas simple où $n = 3$, on trouve

$$
\begin{aligned}
P &= 1 - 6x^4 + 8\alpha x^6 - 3x^8 = k'^4\left(1 + 6y^4 - 4\,\frac{1-2k^2}{kk'}\,y^6 - 3y^8\right)\\
&= \frac{k'^4}{k^4}\left(1 - 6t^4 + 4\,\frac{2-k^2}{k'}\,t^6 - 3t^8\right),
\end{aligned}
$$

$$P_1 = 3 - 8\alpha x^2 + 6x^4 - x^8,$$

$$P_2 = k'^4\left(-3 + 4\,\frac{1-2k^2}{kk'}\,y^2 + 6y^4 + y^8\right) = 1 - \frac{4}{k}\,x^2 + 6x^4 - 4kx^6 + x^8,$$

$$P_3 = \frac{k'^4}{k^4}\left(-3 + 4\,\frac{2-k^2}{k'}\,t^2 - 6t^4 + t^8\right) = 1 - 4kx^2 + 6x^4 - \frac{4}{k}\,x^6 + x^8.$$

En l'appliquant au cas où $n = 5$, on trouve

$$\begin{aligned}
P = {} & 1 - 50x^4 + 280\alpha x^6 - 5(25 + 128\alpha^2)x^8 + 32(23\alpha + 16\alpha^3)x^{10} - 20(15 + 48\alpha^2)x^{12} \\
& + 720\alpha x^{14} - 105x^{16} - 160\alpha x^{18} + (62 + 64\alpha^2)x^{20} - 40\alpha x^{22} + 5x^{24}, \\
P_1 = {} & 5 - 40\alpha x^2 + (62 + 64\alpha^2)x^4 - 160\alpha x^6 - 105x^8 + 720\alpha x^{10} - 20(15 + 48\alpha^2)x^{12} \\
& + 32(23\alpha + 16\alpha^3)x^{14} - 5(25 + 128\alpha^2)x^{16} + 280\alpha x^{18} - 50x^{20} + x^{24}.
\end{aligned}$$

344. Considérons maintenant le cas où n est pair; on a, d'après les équations (20),

$$(51)\qquad V = P,\quad V_1 = x\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}\,P_1,\quad V_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,P_2,\quad V_3 = \sqrt{\frac{1}{k'}}\,P_3.$$

Les quantités P sont encore des fonctions de z doublement périodiques aux périodes ω, ω'; elles sont représentées par les formules

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & P_1(z) &= \frac{\theta_1(nz)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta^{n^2-3}(0)}{\theta_1(z)\,\theta_2(z)\,\theta_3(z)\,\theta^{n^2-3}(z)}, \\
P_2(z) &= \frac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta^{n^2}(z)\,\theta_2(0)}, & P_3(z) &= \frac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta^{n^2}(z)\,\theta_3(0)},
\end{aligned}\right.$$

et satisfont aux relations

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{P\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{P(z)} = \frac{P_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P_2(z)} = \frac{P_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{P_3(z)} = \frac{P_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{-(-1)^{\frac{n}{2}} t^4 P_1(z)} = \frac{1}{t^{n^2}}, \\
&\frac{P\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P(z)} = \frac{P_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{P_2(z)} = \frac{P_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \frac{P_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{-(-1)^{\frac{n}{2}} x^4 P_1(z)} = \frac{1}{x^{n^2}}, \\
&\frac{P\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P(z)} = \frac{P_2\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P_2(z)} = \frac{P_3\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \frac{P_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{y^4 P_1(z)} = \frac{1}{y^{n^2}}.
\end{aligned}\right.$$

On en déduit les relations

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}
P(x) &= (-1)^{\frac{n}{2}} x^{n^2} P\left(\frac{1}{x}\right), & P_1(x) &= -(-1)^{\frac{n}{2}} x^{n^2-1} P_1\left(\frac{1}{x}\right), \\
P_2(x) &= x^{n^2} P_2\left(\frac{1}{x}\right), & P_3(x) &= x^{n^2} P_3\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}\right.$$

et d'autres de même forme par rapport aux variables y et t. D'après cela, dans chacun des polynômes, les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux, ou égaux et de signes contraires. On connaît les premiers coefficients $a^{(0)} = 1$, $a_1^{(0)} = n$, $a_2^{(0)} = 1$, $a_3^{(0)} = 1$, et par suite les derniers. On calculera le polynôme P, comme précédemment, à l'aide de la relation (44), et il suffira de trouver la première moitié des coefficients.

En faisant le calcul pour $n = 6$, on trouve

$$\begin{aligned} P = {} & (1 - x^{36}) - 105 x^4 (1 - x^{28}) + 896 \alpha x^6 (1 - x^{24}) - 12(37 + 288\alpha^2) x^8 (1 - x^{20}) \\ & + 1536 (3\alpha + 4\alpha^3) x^{10} (1 - x^{16}) + 4(621 + 3360\alpha^2 + 1024\alpha^4) x^{12} (1 - x^{12}) \\ & + 384 (33\alpha + 32\alpha^3) x^{14} (1 - x^8) + 126 (15 + 128\alpha^2) x^{16} (1 - x^4). \end{aligned}$$

Équations différentielles d'Abel.

345. Nous avons représenté par x la fonction $\sqrt{k}\lambda(z)$. Si nous représentons de même par X la fonction $\sqrt{k}\lambda(nz)$, ces deux quantités vérifient l'équation

$$(55) \qquad \sqrt{k}\, dz = \frac{dX}{n\sqrt{1 - 2\alpha X^2 + X^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}},$$

où α désigne la constante $\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$. D'après ce que nous avons dit, X est une fonction $\frac{V_1}{V}$ de x, rationnelle si n est impair, égale au produit d'une fraction rationnelle par le radical $\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}$ si n est pair. Cette fonction transforme donc la première expression différentielle en une autre de la même forme.

Cette équation peut s'écrire

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = n^2(1 - 2\alpha X^2 + X^4),$$

ou

$$(56) \qquad (1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left(\frac{d \log X}{dx}\right)^2 = n^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} - 2\alpha\right).$$

On en déduit, en différentiant,

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\frac{d^2 \log X}{dx^2} - 2(\alpha x - x^3)\frac{d \log X}{dx} = n^2\left(X^2 - \frac{1}{X^2}\right),$$

et, en remplaçant X par sa valeur $\frac{V_1}{V}$,

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\dfrac{d^2V}{dx^2}-\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V\dfrac{dV}{dx}+n^2V_1^2}{V^2}\\ &=\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\dfrac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\dfrac{dV_1}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V_1\dfrac{dV_1}{dx}+n^2V^2}{V_1^2}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque n est impair, V et V_1 sont des polynômes entiers en x, le premier pair et du degré n^2-1, le second impair et du degré n^2. Les numérateurs des deux fractions précédentes sont donc des polynômes entiers pairs, le premier du degré $2n^2$, le second du degré $2n^2+2$; les dénominateurs V^2 et V_1^2 étant premiers entre eux, il en résulte que chacun des numérateurs est divisible par le dénominateur correspondant, et que le quotient est un polynôme pair du second degré, tel que Gx^2+G'. La première fraction se réduisant à $2a^{(1)}$ et, par conséquent, à zéro pour $x=0$, la constante G' est nulle. Le terme de V_1 du degré le plus élevé est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n^2}$; le terme le plus élevé dans le second numérateur est $n^2x^{2n^2+2}$; en le divisant par le terme le plus élevé x^{2n^2} du second dénominateur, on obtient la constante $G=n^2$. On conclut de là que les deux polynômes V et V_1 vérifient les deux équations différentielles simultanées

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\frac{d^2V}{dx^2}-\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V\frac{dV}{dx}+n^2(V_1^2-x^2V^2)=0,\\ &(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\frac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V_1\frac{dV_1}{dx}+n^2(V^2-x^2V_1^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Ce sont les intégrales de ces deux équations différentielles, auxquelles on joint les conditions initiales $V=1$, $V_1=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV_1}{dx}=n$ pour $x=0$.

Lorsque n est pair, le numérateur V_1 est de la forme $v_1\sqrt{1-2\alpha x^2+x^4}$, v_1 étant un polynôme entier impair du degré n^2-3. Le premier numérateur est un polynôme entier pair du degré $2n^2+2$. On reconnaît aisément que le second numérateur est aussi un polynôme entier pair du degré $2n^2$. On en conclut, comme précédemment, que les deux fractions sont égales à un même quotient entier Gx^2+G'. En faisant

$x = 0$ dans la première fraction, on trouve $G' = 0$; en divisant les termes les plus élevés du numérateur et du dénominateur de cette même fraction, on trouve $G = n^2$. Ainsi les deux fonctions V et V_1 vérifient encore les deux équations différentielles (58).

Les équations (58) peuvent être mises sous la forme

$$(59)\quad \begin{cases} D_x[\Delta(x) D_x \log\xi] + n^2(X^2 - x^2) = 0, \\ D_x[\Delta(x) D_x \log\xi] + n^2\left(\dfrac{1}{X^2} - x^2\right) = 0, \end{cases}$$

en représentant par ξ soit la fonction V, soit la fonction V_1, et désignant par $\Delta(x)$ le radical $\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}$. Si, entre l'équation (56) et l'une ou l'autre des équations (59), on éliminait X, il est clair qu'on arriverait à une même équation différentielle du troisième ordre par rapport à la fonction ξ de la variable x. Cette équation admet les solutions particulières $\xi = V$, $\xi = V_1$. Pour obtenir l'intégrale générale, il suffit évidemment de considérer l'intégrale générale de l'équation (55) et de la substituer dans l'une des équations (59); la valeur de ξ sera donnée ensuite par deux quadratures. L'équation (55) admet pour intégrale générale

$$X = \sqrt{k}\,\lambda(nz + \beta) = \sqrt{k}\,\frac{\lambda(nz)\mu(\beta)\nu(\beta) + \lambda(\beta)\mu(nz)\nu(nz)}{1 - k^2\lambda^2(\beta)\lambda^2(nz)},$$

β étant une constante arbitraire, ou, en posant $h = \sqrt{k}\,\lambda(\beta)$ et remplaçant $\sqrt{k}\,\lambda(nz)$ par sa valeur $\frac{V_1}{V}$ en fonction de x,

$$(60)\quad X = \frac{VV_1\Delta(h) + h\sqrt{V^4 - 2\alpha V^2 V_1^2 + V_1^4}}{V^2 - h^2 V_1^2}.$$

De la première des équations (59) on déduit ensuite

$$(61)\quad \log\xi = -\int \frac{dx}{\Delta(x)} \int n^2(X^2 - x^2)\,dx.$$

Multiplication de l'argument dans les intégrales de seconde espèce.

346. La formule (13) du n° 273, dans laquelle on remplace z par nz, devient

$$\zeta(nz) = \frac{1}{k^2}\left[nz\,\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{1}{n}\,D_z \log\theta(nz)\right].$$

De la première des formules (40) du n° 342, on déduit

$$D_z \log\theta(nz) = n^2 D_z \log\theta(z) + D_z \log V;$$

on en conclut

$$(62)\qquad \zeta(nz) = n\zeta(z) - \frac{1}{nk^2} D_z \log V = n\zeta(z) - \frac{\sqrt{k}\,\Delta(x)}{nk^2} D_x \log V.$$

Multiplication de l'argument et du paramètre dans les intégrales de troisième espèce.

347. La formule (22) du n° 275, dans laquelle on remplace z et a par nz et na, devient

$$\Pi(nz, na) = nz\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta[n(z+a)]}.$$

On en déduit

$$\Pi(nz, na) - n^2\Pi(z, a) = z\left[n\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} - n^2\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\right] + \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta^{n^2}(z-a)} - \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z+a)]}{\theta^{n^2}(z+a)}.$$

Si l'on pose $x_1 = \sqrt{k}\lambda(z-a)$, $x_2 = \sqrt{k}\lambda(z+a)$, $\varepsilon = \sqrt{k}\lambda(a)$, on a, en vertu de la première des formules (40) du n° 342,

$$\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta^{n^2}(z-a)} - \log\frac{\theta[n(z+a)]}{\theta^{n^2}(z+a)} = \log V(x_1) - \log V(x_2),$$

$$n\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} - n^2\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} = D_a \log V(\varepsilon) = \sqrt{k}\Delta(\varepsilon) D_\varepsilon \log V(\varepsilon);$$

on en conclut la formule

$$(63)\qquad \Pi(nz, na) = n^2\Pi(z, a) + z\sqrt{k}\Delta(\varepsilon) D_\varepsilon \log V(\varepsilon) + \frac{1}{2}\log\frac{V(x_1)}{V(x_2)}.$$

CHAPITRE IV.

DIVISION DE L'UNE DES PÉRIODES.

Division de la première période par un nombre impair.

348. La fonction $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}; \omega'\right)$, que nous désignerons plus simplement par $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$, admet les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2}$; elle satisfait aux relations

$$\theta\left(z + \frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n}\right) = \theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right),$$

$$\theta\left(z + \omega', \frac{\omega}{n}\right) = -e^{-\frac{n\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right).$$

La fonction

$$f(z) = \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right),$$

formée par le produit des n fonctions $\theta\left(z + p\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$, que l'on obtient en attribuant à p les n valeurs entières consécutives $-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, +1, \dots, \frac{n-1}{2}$, admet les mêmes zéros et satisfait aux mêmes relations; car, lorsqu'on remplace z par $z + \frac{\omega}{n}$, chaque facteur devient égal au suivant, et le dernier au premier. Les deux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ et $f(z)$ sont donc dans un rapport constant. Si dans cette relation on

remplace z par l'une des quantités $z+\frac{\omega}{2}$, $z+\frac{\omega'}{2}$, $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$, on obtient les quatre formules

$$(1)\quad \begin{cases} \theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=\mathrm{A}\prod\theta\left(z+p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{A}\prod\theta_1\left(z+p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=\mathrm{A}\prod\theta_2\left(z+p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=\mathrm{A}\prod\theta_3\left(z+p\frac{\omega}{n}\right), \end{cases}$$

la lettre A désignant une constante.

En mettant à part le facteur qui correspond à $p=0$, et en groupant deux à deux ceux qui correspondent à des valeurs de p égales et de signes contraires, on en déduit (n° 329)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta(z)\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta'_1(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta_1(z)\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta_2(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta_2\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta_2(z)\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta_3(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta_3\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta_3(z)\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta_2^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_3^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right]. \end{cases}$$

349. Nous avons appelé g et k le multiplicateur et le module relatifs aux périodes ω, ω'; nous appellerons de même g_1 et k_1 le multiplicateur et le module relatifs aux périodes $\frac{\omega}{n}$, ω'. Les formules précédentes

peuvent être mises sous la forme

$$
(3)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)\right] = \mathfrak{P},\\
&\frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mathfrak{P}_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} = \mu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\mathfrak{P}_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta_3\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} = \nu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\frac{\mu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\mathfrak{P}_3,
\end{aligned}
\right.
$$

les lettres $\mathfrak{P}$ désignant des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, du degré $n-1$. En divisant membre à membre les trois dernières formules par la première, on en déduit

$$
(4)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{g_1}{g}\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}, \quad \mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\mu(z)\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}}, \quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\nu(z)\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}}.
$$

En faisant $z = 0$ dans les équations (1), on trouve les valeurs des trois constantes $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k'_1}$, g_1, telles qu'elles sont définies par les formules (17) du n° 76 et (24) du n° 159,

$$
(5)\quad \sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}, \quad \sqrt{k'_1} = \sqrt{k'^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}, \quad \frac{g_1}{g} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}.
$$

Des formules (1) on déduit aussi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{k_1}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \mu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k^n k'_1}{k'^n k_1}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \mu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k'_1}{k'^n}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right). \end{aligned}\right.$$

Les symboles $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ désignent des quantités bien déterminées; afin de simplifier les notations, nous avons jusqu'à présent représenté le quotient ou le produit de ces deux quantités par $\sqrt{\frac{k'}{k}}$ ou $\sqrt{kk'}$; de même, dans les formules précédentes, les expressions $\sqrt{k^n}$, $\sqrt{k'^n}$, et par exemple $\sqrt{\frac{k^n k'_1}{k'^n k_1}}$, désignent les quantités $(\sqrt{k})^n$, $(\sqrt{k'})^n$, $\frac{(\sqrt{k})^n \sqrt{k'_1}}{(\sqrt{k'})^n \sqrt{k_1}}$.

Division de la seconde période par un nombre impair.

350. La division de la seconde période s'opère de la même manière. La fonction $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, ou plus simplement $\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$, admet les zéros $z = m\omega + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ et satisfait aux relations

$$\theta\left(z+\omega, \frac{\omega'}{n}\right) = \theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right),$$

$$\theta\left(z+\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z+\frac{\omega'}{n}\right)}\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right).$$

La fonction

$$f(z) = \prod \theta\left(z + p\frac{\omega'}{n}, \omega, \omega'\right),$$

formée par le produit des n fonctions $\theta\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant à p les n valeurs entières consécutives $-\frac{n-1}{2}, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, admet les mêmes zéros et satisfait aux mêmes relations; car, lorsqu'on remplace z par $z+\frac{\omega'}{n}$, chaque facteur devient égal au suivant, et le dernier devient égal au premier multiplié par $-e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z+\frac{\omega'}{n}\right)}$. Les deux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$, $f(z)$ sont donc dans un rapport constant. En remplaçant dans cette relation z par l'une des quantités $z+\frac{\omega}{2}$, $z+\frac{\omega'}{2}$, $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$, on obtient les quatre formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \mathrm{A}' \prod \theta\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \mathrm{A}' \prod \theta_1\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \mathrm{A}' \prod \theta_2\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \mathrm{A}' \prod \theta_3\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),
\end{aligned}\right.$$

analogues aux formules (1). On en déduit de la même manière

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} &= \theta(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
\frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta'_1(0)\,\theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} &= \theta_1(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
\frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta_2(0)\,\theta^{n-1}(0)}{\theta_2\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} &= \theta_2(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
\frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta_3(0)\,\theta^{n-1}(0)}{\theta_3\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} &= \theta_3(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right].
\end{aligned}\right.$$

351. Nous appellerons g_2 et k_2 le multiplicateur et le module relatifs aux périodes ω, $\frac{\omega'}{n}$. Des formules précédentes on déduit

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\lambda^2(z)\right] = \mathfrak{P}',\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mathfrak{P}'_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \mu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\mathfrak{P}'_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \nu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1-k^2\frac{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\mathfrak{P}'_3,
\end{aligned}\right.$$

les lettres $\mathfrak{P}'$ désignant encore des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$ du degré $n-1$, et l'on a

$$(10)\quad \lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_2}{g}\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'},\quad \mu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mu(z)\mathfrak{P}'_2}{\mathfrak{P}'},\quad \nu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\nu(z)\mathfrak{P}'_3}{\mathfrak{P}'}.$$

En faisant $z=0$ dans les équations (7), on trouve, comme précédemment,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{k_2} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)},\qquad \sqrt{k'_2} = \sqrt{k'^n}\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)},\\
&\frac{g_2}{g} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\frac{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

Des formules (7) on déduit aussi

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda\left(z,\frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k^n}{k_1}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}}\lambda\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\mu\left(z,\frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k^n k'_1}{k'^n k_1}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}}\mu\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\nu\left(z,\frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k'_1}{k'^n}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\nu\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right).
\end{aligned}\right.$$

352. *Remarque.* — Les relations établies au n° 348 montrent que les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ sont égales à des polynômes entiers et homogènes, du degré n, par rapport aux fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les relations du n° 350, dans lesquelles on remplace ω par $\frac{\omega}{n}$, montrent que les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont égales à des polynômes entiers et homogènes, du degré n, par rapport aux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; en mettant à la place de ces dernières leurs valeurs, nous obtiendrons les expressions des fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ par des polynômes entiers, du degré n^2, par rapport aux fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$ étant homogènes par rapport aux trois lettres z, ω, ω' (n° 73), les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont les mêmes que $\theta(nz, \omega, \omega')$; nous arriverons ainsi, par deux opérations successives, aux polynômes que nous avons obtenus directement dans le Chapitre précédent (n°s 330 et 331).

Le même mode de transformation s'applique aux fonctions elliptiques. Concevons que l'on divise par n, d'abord la première période, puis la seconde; après la seconde opération, on retrouve évidemment le module primitif k et le multiplicateur ng. Les formules (10) et (11), dans lesquelles on remplace g et k par g_1 et k_1, et g_2 par ng, donnent

les expressions de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ par des fractions rationnelles en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, du degré n; mais les formules (3) et (4) donnent les expressions de ces dernières fonctions par des fractions rationnelles en $\lambda(z, \omega, \omega')$, $\mu(z, \omega, \omega')$, $\nu(z, \omega, \omega')$; en substituant ces valeurs dans les formules précédentes, on obtiendra les expressions des fonctions $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ par des fractions rationnelles en $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, du degré n^2.

En effectuant la même opération avec les formules (6) et (12), on trouve

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda(nz) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \\ \mu(nz) &= \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \mu\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \\ \nu(nz) &= \frac{1}{k'^{\frac{n^2-1}{2}}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right). \end{aligned}\right.$$

Autre méthode.

353. Au lieu d'exprimer les nouvelles fonctions elliptiques par des produits, on peut les exprimer par des sommes. Les fonctions

$$\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\lambda\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\mu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\nu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right)$$

admettant les périodes ω, ω', la somme des résidus de chacune d'elles dans un parallélogramme (ω, ω') est nulle. Considérons le parallélogramme qui a pour sommets les points $\pm\frac{\omega}{2}$, $\pm\frac{\omega}{2} + \omega'$, et supposons le point t situé à l'intérieur. Les infinis des fonctions dans ce pa-

rallélogramme sont $z = t$ et $z = \frac{\omega'}{2} - p\frac{\omega}{n}$, p variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. En remplaçant à la fin t par z, on obtient les équations

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{gk}{g_1 k_1} \displaystyle\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \lambda\left(z + p\dfrac{\omega}{n}\right), \\ \mu\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{gk}{g_1 k_1} \displaystyle\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \mu\left(z + p\dfrac{\omega}{n}\right), \\ \nu\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{g}{g_1} \displaystyle\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\dfrac{\omega}{n}\right). \end{cases}$$

Si l'on met à part le terme qui correspond à $p = 0$ et si l'on groupe les autres termes deux à deux à l'aide des formules (3) du n° 319, il vient

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{gk}{g_1 k_1}\lambda(z)\left[1 + 2\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)}\right], \\ \mu\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{gk}{g_1 k_1}\mu(z)\left[1 + 2\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)}\right], \\ \nu\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right) = \dfrac{g}{g_1}\nu(z)\left[1 + 2\displaystyle\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \dfrac{\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)}\right]. \end{cases}$$

354. Les fonctions

$$\lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\lambda\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\mu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\nu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right)$$

admettant de même les périodes ω, ω', la somme des résidus de chacune d'elles dans un parallélogramme (ω, ω') est nulle. Nous prendrons les

mêmes parallélogrammes que précédemment et nous supposerons le point t à l'intérieur. Les infinis des fonctions dans le parallélogramme sont $z = t$ et $z = \frac{\omega'}{2} - p\frac{\omega'}{n}$, p variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. On trouve ainsi

$$(16)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{gk}{g_1 k_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \mu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{g}{g_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \nu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \end{cases}$$

d'où

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \lambda(z)\left[1 + 2\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\nu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\lambda^2(z)}\right], \\ \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{gk}{g_1 k_1} \mu(z)\left[1 + 2\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\lambda^2(z)}\right], \\ \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{g}{g_1} \nu(z)\left[1 + 2\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \nu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\lambda^2(z)}\right]. \end{cases}$$

Nous ferons remarquer que les formules (14) et (16) sont des conséquences des formules (4) et (10). Considérons, par exemple, la première des équations (4); si l'on y regarde $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ comme une quantité donnée et $\lambda(z)$ comme l'inconnue, l'équation est du degré n par rapport à cette inconnue; le premier membre ne changeant pas quand on y remplace z par $z + \frac{2\omega}{n}$, on en conclut que les n quantités

représentées par la formule $\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right)$, dans laquelle p reçoit n valeurs entières consécutives, sont les n racines de l'équation; la somme des racines étant égale à $\frac{g_1 k_1}{gk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, on a

$$(18)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \lambda\left(z+p\frac{\omega}{n}\right).$$

355. La combinaison des formules (14) et (16) donne l'expression des fonctions $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ par des sommes. On a, en effet, d'après la première des formules (17),

$$\lambda(nz, \omega, \omega') = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_1 k_1}{ngk}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

et, en remplaçant $\lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ par sa valeur donnée par la première des formules (14),

$$(19)\qquad \lambda(nz) = \frac{1}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \lambda\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

On a de même

$$(20)\qquad \mu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{p+q} \mu\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right),$$

$$(21)\qquad \nu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{q} \nu\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

On obtient directement ces dernières équations en appliquant la méthode aux trois fonctions

$$\lambda(nz)\lambda\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right),\quad \mu(nz)\mu\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right),\quad \nu(nz)\nu\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right),$$

qui admettent les deux périodes ω, ω'. Les infinis contenus dans le paral-

lélogramme considéré précédemment sont $z = t$ et $z = \frac{\omega'}{2} - p\frac{\omega}{n} - q\frac{\omega'}{n}$, p et q variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. Si l'on met à part le facteur qui correspond à $p = 0$, $q = 0$ et si l'on groupe ensuite les termes deux à deux, on en déduit

$$(22)\quad \begin{cases} \lambda(nz) = \frac{1}{n}\lambda(z)\left[1 + 2\sum \frac{(-1)^p \mu(a)\nu(a)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right], \\ \mu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\mu(z)\left[1 + 2\sum \frac{(-1)^{p+q}\mu(a)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right], \\ \nu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\nu(z)\left[1 + 2\sum \frac{(-1)^q \nu(a)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right], \end{cases}$$

la lettre a désignant les $\frac{n^2-1}{2}$ valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$, que l'on obtient quand on combine avec $p = 0$ les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de q, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de p les n valeurs 0, $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{n-1}{2}$ de q (n° 330). D'après la remarque du numéro précédent, elles sont aussi des conséquences des formules (14) du n° 332.

Division de la première période par un nombre pair.

356. Le raisonnement du n° 348 conduit aux formules

$$(23)\quad \begin{cases} \theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = A\prod \theta\left(z + 2p\frac{\omega}{2n}\right), \\ \theta_1\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} A\prod \theta_1\left(z + 2p\frac{\omega}{2n}\right), \\ \theta_2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = A\prod \theta_2\left[z + (2p-1)\frac{\omega}{2n}\right], \\ \theta_3\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = A\prod \theta_3\left[z + (2p-1)\frac{\omega}{2n}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles p reçoit les n valeurs entières consécutives $-\left(\frac{n}{2} - 1\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$; on les déduit de la première en ajoutant à z

l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{2n}, \frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{2n}+\frac{\omega'}{2}$. En groupant deux à deux les facteurs, excepté ceux qui, dans les deux premières, correspondent à $p=0$ et à $p=\frac{n}{2}$, on obtient les formules

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta_3(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \theta(z)\,\theta_3(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta'_1(0)\theta_2(0)\theta^{n-2}(0)}{\theta'_1\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \theta_1(z)\theta_2(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_2\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{\theta^2(z)-\frac{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\theta_1^2(z)\right\},\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_3\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{\theta^2(z)-\frac{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\theta_1^2(z)\right\},
\end{aligned}\right.$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \nu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\,\mathfrak{P},\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z)\mu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mu(z)\,\mathfrak{P}_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{1-\frac{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\lambda^2(z)\right\} = \mathfrak{P}_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0,\frac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{1-k^2\frac{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\lambda^2(z)\right\} = \mathfrak{P}_3,
\end{aligned}\right.$$

les lettres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ désignant des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, les deux premiers du degré $n-2$, les deux derniers du degré n. On a ainsi

$$(26)\quad \lambda\left(z,\frac{\omega}{n},\omega'\right)=\frac{g_1}{g}\frac{\lambda(z)\mu(z)\mathfrak{P}_1}{\nu(z)\mathfrak{P}},\quad \mu\left(z,\frac{\omega}{n},\omega'\right)=\frac{\mathfrak{P}_2}{\nu(z)\mathfrak{P}},\quad \nu\left(z,\frac{\omega}{n},\omega'\right)=\frac{\mathfrak{P}_3}{\nu(z)\mathfrak{P}}.$$

357. Remarquons que les quantités $p\frac{\omega}{n}$ et $\left(\frac{n}{2}-p\right)\frac{\omega}{n}$ ou $\frac{\omega}{2}-p\frac{\omega}{n}$ prenant les mêmes valeurs, quand p varie de 1 à $\frac{n}{2}-1$, on a, en vertu des relations (19) du n° 77,

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\lambda\left(\frac{\omega}{2}-p\frac{\omega}{n}\right)=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\frac{\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)},$$

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\mu\left(\frac{\omega}{2}-p\frac{\omega}{n}\right)=k'^{\frac{n}{2}-1}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\frac{\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)},$$

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\nu\left(\frac{\omega}{2}-p\frac{\omega}{n}\right)=k'^{\frac{n}{2}-1}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)};$$

ces trois relations se réduisent à deux

$$(27)\quad \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\nu^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)=k'^{\frac{n}{2}-1},\qquad \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right).$$

Les quantités $(2p-1)\frac{\omega}{2n}$ et $[n-(2p-1)]\frac{\omega}{2n}$ ou $\frac{\omega}{2}-(2p-1)\frac{\omega}{2n}$ prenant aussi les mêmes valeurs quand p varie de 1 à $\frac{n}{2}$, on trouve de

même

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right] = k'^{\frac{n}{2}}, \\ \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \mu\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right] = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]\nu\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]. \end{cases}$$

En faisant $z = 0$ dans les équations (23), on obtient ensuite le multiplicateur g_1 et le module k_1 des nouvelles fonctions elliptiques

$$(29)\qquad \sqrt{k_1} = k^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right], \quad \frac{g_1}{g} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)}{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}.$$

Division de la seconde période par un nombre pair.

358. On obtient de la même manière les formules

$$(30)\quad \begin{cases} \theta\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta\left[z + (2p-1)\dfrac{\omega'}{2n}\right], \\ \theta_1\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = -\,i A' e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega'}{4n}\right)} \prod \theta_1\left(z + 2p\,\dfrac{\omega'}{2n}\right), \\ \theta_2\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = A' e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega'}{4n}\right)} \prod \theta_2\left(z + 2p\,\dfrac{\omega'}{2n}\right), \\ \theta_3\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta_3\left[z + (2p-1)\dfrac{\omega'}{2n}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles p reçoit les n valeurs consécutives $-\left(\frac{n}{2} - 1\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$; on les déduit de la première en ajoutant à z l'une des quantités $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2n}$, $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2n} + \frac{\omega}{2}$. Par le groupement des facteurs,

elles se mettent sous la forme

$$
(31)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ \theta^2(z) - \frac{\theta_1^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\theta^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\,\theta_1^2(z) \right\},\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta'_1(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \theta(z)\theta_1(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\,\theta_1^2(z) \right],\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta_2(0)\theta_3(0)\theta^{n-2}(0)}{\theta_2\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \theta_2(z)\theta_3(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\,\theta_1^2(z) \right],\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_3\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ \theta^2(z) - \frac{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\,\theta_1^2(z) \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(32)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ 1 - k^2\lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]\lambda^2(z) \right\} = \mathfrak{P}',\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)} \right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mathfrak{P}'_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \mu(z)\nu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \left[1 - \frac{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z) \right] = \mu(z)\nu(z)\mathfrak{P}'_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ 1 - k^2\frac{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\lambda^2(z) \right\} = \mathfrak{P}'_3,
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on a

$$
(33)\quad \lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_2}{g}\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'}, \quad \mu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mu(z)\nu(z)\mathfrak{P}'_2}{\mathfrak{P}'}, \quad \nu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mathfrak{P}'_3}{\mathfrak{P}'}.
$$

On trouve, comme dans le numéro précédent,

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
&\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{k^{\frac{n}{2}-1}},\\
&\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \mu\left(p\,\frac{\omega'}{n}\right) = (-i)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda\left(p\,\frac{\omega'}{n}\right) \nu\left(p\,\frac{\omega'}{n}\right),\\
&\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^{\frac{n}{2}}},\\
&\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \mu\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right] = (-i)^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right] \nu\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right],
\end{aligned}\right.$$

et, en faisant $z = 0$ dans les équations (30),

$$(35)\quad \sqrt{k'_1} = k'^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \frac{1}{\nu^2\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right]},\qquad \frac{g_1}{g} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \nu^2\left[(2p-1)\,\frac{\omega'}{2n}\right]}{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \nu^2\left(p\,\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

359. *Remarque.* — La première des équations (26), dont on élève les deux membres au carré et dans laquelle on regarde $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ comme une quantité connue et $\lambda^2(z)$ comme l'inconnue, est du degré n par rapport à cette inconnue; les n racines sont représentées par la formule $\lambda^2\left(z + p\,\frac{\omega}{n}\right)$, où p reçoit n valeurs entières consécutives; la somme des racines étant connue, il en résulte la relation

$$(36)\quad \lambda^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \left(\frac{gk}{g_1 k_1}\right)^2 \left[-1 - 2\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) + \sum_{p=0}^{p=n-1} \lambda^2\left(z + p\,\frac{\omega}{n}\right)\right].$$

De la deuxième et de la troisième des équations (26) on déduit de même

$$(37)\quad \mu^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \left(\frac{gk}{g_1 k_1}\right)^2 \left\{ \sum_{p=0}^{p=n-1} \mu^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right) - 2k'^2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \frac{\lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]} \right\},$$

$$(38)\quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{g}{g_1} \sum_{p=0}^{p=n-1} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right).$$

La considération du produit des racines dans les deux premières équations conduit aux relations

$$(39)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{\frac{h^n}{k_1}} \prod_{p=0}^{p=n-1} \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n}\right),$$

$$(40)\quad \mu^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = 1 - \frac{h^n}{k_1 k'^n} \prod_{p=0}^{p=n-1} \mu^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right).$$

Les formules (33), relatives à la division de la seconde période, donneraient des relations analogues.

Dans ce qui précède, nous avons exprimé les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les fonctions $\vartheta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ s'expriment par des formules toutes pareilles au moyen des fonctions $\vartheta(z, \omega, \omega')$.

Nombre des fonctions provenant de la division de l'une des périodes de l'un des couples qui correspondent à un module donné.

360. Nous savons qu'à un module donné k, le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, correspondent une infinité de couples de périodes elliptiques. Désignons par 2ω, ω' l'un d'eux, par exemple celui que nous avons déterminé, au n° **221**, à l'aide d'intégrales définies; tous les autres $2\omega_1$, ω'_1 sont définis par les relations

$$\omega = (4a+1)\omega_1 + 4b\omega'_1, \quad \omega' = 4a'\omega_1 + (4b'+1)\omega'_1,$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1)-16ba'=1$ (n° **232**); mais nous considérerons d'une manière plus générale les couples de périodes définis par les relations

$$(41)\qquad \omega=(2a+1)\omega_1+2b\omega'_1,\quad \omega'=2a'\omega_1+(2b'+1)\omega'_1,$$

avec la condition

$$(42)\qquad (2a+1)(2b'+1)-4ba'=1;$$

car les fonctions $\lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, qui leur correspondent, sont égales à $\pm\lambda(z, \omega, \omega')$ et ont pour modules $\pm k$, de sorte que les polynômes φ qui entrent dans les expressions des fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right)$, $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$ renferment la même fonction donnée $\lambda^2(z, k)$, la même constante k^2, et ne diffèrent que par la valeur de l'une des constantes $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}, k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{n}, k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega}{2n}, k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2n}, k\right)$. Dans ce qui suit, nous ne distinguerons pas deux fonctions égales et de signes contraires, ou ayant leurs modules égaux et de signes contraires.

Nous remarquerons d'abord que, lorsque n est impair, la division de la seconde période donne les mêmes fonctions que celle de la première; car deux couples de périodes satisfaisant aux relations (41) sont liés par des relations de même forme

$$\omega_2=(2a_1+1)\omega_1+2b_1\omega'_1,\quad \omega'_2=2a'_1\omega_1+(2b'_1+1)\omega'_1,$$

avec la seule condition $(2a_1+1)(2b'_1+1)-4b_1a'_1=1$; d'où

$$\frac{\omega_2}{n}=\frac{2a_1+1}{n}\omega_1+2b_1\frac{\omega'_1}{n},\quad \omega'_2=2a'\omega_1+(2b'_1+1)n\frac{\omega'_1}{n}.$$

Pour que les deux fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega_2}{n}, \omega'_2\right)$, $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$ soient dans un rapport constant, il est nécessaire et il suffit que $2a_1+1$ soit divisible par n, ce qui est impossible quand n est pair; lorsque n est impair et égal à $2m+1$, il suffira de prendre $a_1=b_1=m$, $a'_1=b'_1=-m$; les deux fonctions seront alors égales et leurs modules égaux ou égaux et de signes contraires.

361. Proposons-nous maintenant de chercher le nombre des fonc-

tions $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$, quand n est impair. Les relations (41) renferment quatre nombres entiers $2a+1$, b, a', $2b'+1$, assujettis à la seule condition (42). Considérons tous les systèmes de nombres entiers dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n soit un même nombre n'; posons $n = n'n''$, $2a+1 = n'(2a_1+1)$, les nombres n'' et $2a_1+1$ étant premiers entre eux. La première des relations (41) devient

$$\frac{\omega}{n'} = (2a_1+1)\omega_1 + 2n''b\frac{\omega'_1}{n}.$$

Puisque les nombres $2a_1+1$ et $4n''b$ sont premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres entiers a'' et $2b''+1$ satisfaisant à la condition

$$(43) \qquad (2a_1+1)(2b''+1) - 4n''ba'' = 1.$$

D'après cela, si l'on pose

$$\omega'' = 2a''\omega_1 + (2b''+1)\frac{\omega'_1}{n},$$

on voit que le couple des périodes $\omega_1, \frac{\omega'_1}{n}$ est équivalent au couple $\frac{\omega}{n'}, \omega''$, et que la fonction $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$ est égale à $\pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$. Des relations (42) et (43), retranchées membre à membre, on déduit

$$(2a_1+1)[2b''+1 - n'(2b'+1)] = 4b(n''a'' - a'),$$

et par suite

$$(44) \qquad \begin{cases} n''a'' - a' = (2a_1+1)t, \\ 2b''+1 - n'(2b'+1) = 4bt, \end{cases}$$

t étant un nombre entier. Si, dans la valeur de ω'', on remplace a'' et $2b''+1$ par leurs valeurs tirées de ces deux équations, on trouve

$$\omega'' = \frac{\omega'}{n''} + 2t\frac{\omega}{n} = \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}.$$

Ainsi toutes les fonctions provenant de la division par n de la seconde période des couples qui sont fournis par les systèmes de nombres entiers, dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n

est égal à un même nombre n', sont comprises dans la formule

$$(45) \qquad \lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right).$$

On pourra effectuer l'opération à l'aide de deux divisions successives. On exprimera d'abord $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega'\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z, \omega, \omega')$ du degré n', puis $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right)$ par une fraction rationnelle du degré n'' en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega' + 2t\frac{\omega}{n'}\right)$ ou $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega'\right)$.

362. Nous remarquons que les trois nombres n', n'', t n'ont pas de facteur commun; car, si cela avait lieu, d'après la seconde des équations (44), ce facteur commun diviserait $2b'' + 1$ et, par suite, le premier membre de l'équation (43), ce qui est impossible. On en conclut que le nombre entier t, qui entre dans la formule (45), n'est pas arbitraire; il doit être premier avec le plus grand commun diviseur δ des deux nombres n' et n''. Nous allons voir qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque première avec δ. L'équation (42) est une conséquence des équations (43) et (44). Étant donné le nombre entier t premier avec δ, proposons-nous de déterminer six nombres entiers $2a_1 + 1$, b, a', $2b' + 1$, a'', $2b'' + 1$ satisfaisant aux trois équations (43) et (44), et tels que $2a_1 + 1$ soit premier avec n''. Les deux équations (44) donneront immédiatement les deux nombres entiers a' et $2b'' + 1$, quand les autres seront connus; l'équation (43), dans laquelle on remplace $2b'' + 1$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (44), devient

$$(46) \qquad n'(2a_1 + 1)(2b' + 1) - 4n''ba'' = 1 - 4t(2a_1 + 1)b;$$

le premier membre étant divisible par δ, le second membre l'est aussi. En appelant t' le quotient entier, on a la relation

$$(47) \qquad 4t(2a_1 + 1)b + \delta t' = 1,$$

et l'équation (46) se réduit à

$$(48) \qquad n'_1(2a_1 + 1)(2b' + 1) - 4n''_1 ba'' = t',$$

n'_1 et n''_1 désignant les quotients premiers entre eux des nombres n' et n'' par leur plus grand commun diviseur δ. La question revient à trouver des nombres entiers satisfaisant aux deux équations (47) et (48). Les nombres donnés $4t$ et δ étant premiers entre eux, on peut déterminer des nombres entiers x et t' satisfaisant à l'équation $4tx + \delta t' = 1$. Prenons l'un quelconque des nombres x; décomposons-le en un produit de trois facteurs : l'un x', formé des facteurs premiers qui entrent dans n'_1; le deuxième x'', des facteurs premiers qui entrent dans n''_1, quels que soient d'ailleurs leurs exposants; le troisième y, des facteurs premiers étrangers à n'_1 et à n''_2. En faisant $2a_1 + 1 = x'$, $b = x''y$, nous aurons deux nombres premiers entre eux et satisfaisant à l'équation (47), avec la valeur correspondante de t'; en outre, d'après cette relation, le nombre $2a_1 + 1$ est premier avec δ; comme il l'est déjà avec n''_1, il l'est aussi avec n''; d'ailleurs b est premier avec n'_1. Les deux nombres $n'_1(2a_1 + 1)$ et $4n''_1 b$, ainsi formés, étant premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres entiers $2b' + 1$ et a'' vérifiant l'équation (48).

363. A l'inspection de la formule (45), on voit immédiatement que deux valeurs de t dont la différence est un multiple de n'' donnent la même fonction; d'ailleurs, pour que deux de ces fonctions soient dans un rapport constant, il est nécessaire que leurs périodes soient équivalentes, ce qui exige, puisque le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire, que la différence des deux valeurs de t soit un multiple de n''. Si donc on ne regarde pas comme différentes deux fonctions égales et de signes contraires, on pourra dire que le nombre des fonctions qui correspondent à un plus grand commun diviseur n' entre $2a + 1$ et n est égal au nombre des nombres inférieurs à n'' et premiers avec δ, n'' étant le quotient de n par n' et δ le plus grand commun diviseur entre n' et n''. On procédera de même pour chaque diviseur du nombre n. Le raisonnement précédent montre que deux fonctions qui se rapportent à deux diviseurs différents ne sont pas dans un rapport constant. En prenant successivement tous les diviseurs, on obtiendra ainsi toutes les fonctions $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$.

Nous avons divisé par n la seconde période; on opérerait de même la division de la première période. Tous les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (42), et dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2b'+1$ et n est n', donnent des fonctions représentées par la formule

$$(49)\qquad \lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega + 2t\dfrac{\omega'}{n'}}{n''}, \frac{\omega'}{n'}\right),$$

dans laquelle t désigne encore un nombre entier premier avec δ; mais nous avons vu que ces fonctions sont les mêmes que les précédentes.

Dans le cas particulier où n est premier, il n'y a que deux hypothèses possibles, soit $n'=n$, $n''=1$, soit $n'=1$, $n''=n$. Si l'on divise la seconde période, la première hypothèse donne la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, la seconde les n fonctions représentées par la formule $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'+2t\omega}{n}\right)$, où l'on attribue à t les n valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ce qui fait en tout $n+1$ fonctions différentes. Si l'on divise la première période, la première hypothèse donne la fonction $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, la seconde les n fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega+2t\omega'}{n}, \omega'\right)$, ce qui reproduit les mêmes fonctions dans un autre ordre.

364. Considérons actuellement le cas où le diviseur n est un nombre pair, que nous représenterons par $2^h n_1$, n_1 étant impair. Divisons d'abord la seconde période. En posant $n_1 = n'n''$ et appelant δ le plus grand commun diviseur de n' et n'', on démontre, comme précédemment, que les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (42), et dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n ou n_1 est égal à n', donnent les fonctions comprises dans la formule

$$(50)\qquad \lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\dfrac{\omega}{n'}}{2^h n''}\right),$$

où t désigne un nombre entier premier avec δ. En divisant la première

période, on arrive de même à la formule

$$(51)\qquad \lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega + 2t\frac{\omega'}{n'}}{2^h n''}, \frac{\omega'}{n'}\right),$$

t désignant toujours un nombre premier avec δ. Les fonctions représentées par ces deux formules sont différentes. Le nombre des fonctions données par chacune d'elles et se rapportant à un plus grand commun diviseur n' est égal au nombre des nombres inférieurs à $2^h n''$ et premiers avec δ.

Nous avons vu (n° 236) que, si 2ω, ω' sont des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z, k)$, la fonction $\lambda(z, k')$ admet les périodes elliptiques $-2\omega' i$, ωi. En comparant les formules des n°s 349 et 351, 357 et 358, on reconnaît que les deux fonctions $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\lambda\left(z, \frac{-\omega' i}{n}, \omega i\right)$ ont des multiplicateurs égaux et des modules complémentaires, et de même les deux fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\lambda\left(z, -\omega' i, \frac{\omega i}{n}\right)$.

Division par deux.

365. D'après leur définition par les formules (6) du n° 74, les valeurs des fonctions $\theta(z)$ pour une valeur de z de la forme $z = a\omega + b\omega'$, a et b étant des constantes quelconques, sont des fonctions de la quantité imaginaire $\rho = \frac{\omega'}{\omega} = r + si$, dans laquelle le coefficient s est positif et différent de zéro; si l'on représente, à la façon ordinaire, la variable ρ par un point du plan ayant pour coordonnées r et s, ces valeurs des fonctions θ sont des fonctions holomorphes de ρ pour toute la moitié du plan située au-dessus de l'axe des x. Les quantités $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$, définies par les formules (17) du n° 76, sont, d'après cela, des fonctions holomorphes de ρ; en considérant leurs expressions en produits par les formules (29) et (30) du n° 205, on voit que leurs racines carrées sont

elles-mêmes holomorphes par rapport à ρ; nous poserons

$$(52)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}} \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\rho i}{8}} \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}}, \\ \sqrt[4]{k'} = \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}} = \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}}. \end{cases}$$

Voici d'autres fonctions holomorphes de ρ qui nous seront utiles :

1° Si, dans les formules (13) du n° 75, on fait $z = -\dfrac{\omega}{4}$, on trouve

$$\theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right) = \theta\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \theta_2\left(\frac{\omega}{4}\right) = \theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

d'où

$$\nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \lambda^2\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{1+k'}.$$

En définissant le radical $\sqrt{1+k'}$ au moyen de $\lambda\left(\dfrac{\omega}{4}\right)$, on a

$$(53)\qquad \lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}.$$

En définissant $\sqrt{1-k'}$ par la relation $\sqrt{1-k'} \times \sqrt{1+k'} = k$, on en déduit

$$(54)\quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{-i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = -i\sqrt{k'}.$$

2° Si, dans les formules (14) du n° 75, on fait $z = -\dfrac{\omega'}{4}$, on trouve

$$\theta_3\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \theta_2\left(\frac{\omega'}{4}\right), \quad \theta_1\left(\frac{\omega'}{4}\right) = i\theta\left(\frac{\omega'}{4}\right),$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}, \quad \nu\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \sqrt{k}\,\mu\left(\frac{\omega'}{4}\right), \quad \nu^2\left(\frac{\omega'}{4}\right) = 1+k.$$

En définissant le radical $\sqrt{1+k}$ par la valeur de $\nu\left(\frac{\omega'}{4}\right)$, on a

$$(55)\qquad \lambda\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{i}{\sqrt{k}},\quad \mu\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}},\quad \nu\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\sqrt{1+k}.$$

En définissant $\sqrt{1-k}$ par la relation $\sqrt{1-k}\times\sqrt{1+k}=k'$, on en déduit

$$(56)\ \lambda\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \mu\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{-i\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}},\quad \nu\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\sqrt{1-k}.$$

3° Si, dans les formules (15) du n° 75, on fait $z=-\frac{\omega+\omega'}{4}$, on trouve

$$\theta\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_2\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),\quad \theta_1\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_3\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}},\quad \nu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{kk'}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),$$

et, par suite,

$$\lambda^2\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\frac{k+ik'}{k}.$$

En définissant le radical $\sqrt{k+ik'}$ au moyen de $\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)$, on a

$$(57)\ \lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{k+ik'}}{\sqrt{k}},\ \mu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}},\ \nu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{k'}\sqrt{k+ik'}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

En définissant $\sqrt{k-ik'}$ par la relation $\sqrt{k-ik'}\times\sqrt{k+ik'}=1$, on en déduit

$$(58)\ \lambda\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{k-ik'}}{\sqrt{k}},\ \mu\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{\frac{\pi i}{4}},\ \nu\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\sqrt{k'}\sqrt{k-ik'}\,e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

366. Divisons maintenant par deux la première période. Les for-

mules (29) du n° 357 donnent

$$(59) \qquad \frac{g_1}{g} = 1 + k', \quad \sqrt{k_1} = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}},$$

et les formules (26) du n° 356 se réduisent à

$$(60) \qquad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = (1+k')\frac{\lambda(z)\mu(z)}{\nu(z)}, \\ \mu\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-(1+k')\lambda^2(z)}{\nu(z)}, \\ \nu\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-(1-k')\lambda^2(z)}{\nu(z)}. \end{cases}$$

D'après la dernière de ces formules, on a

$$k'_1 = \nu\left(\frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

La quantité $\sqrt{k'_1}$ est la fonction holomorphe de ρ que l'on obtient en remplaçant ρ par 2ρ dans l'expression de $\sqrt{k'}$; d'autre part, en vertu de ce qui précède, la quantité $\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ est une fonction holomorphe de ρ; ces deux fonctions ont des valeurs, réelles positives et égales, pour toutes les valeurs de ρ de la forme $\rho = si$; leur rapport est aussi holomorphe, et conserve une valeur constante, quand la variable ρ décrit la partie positive de l'axe des y; on en conclut, d'après le corollaire du n° 114, qu'il reste constant dans tout le demi-plan. On a donc, pour toutes les valeurs de ρ dans lesquelles s est positif,

$$(61) \qquad \sqrt{k'_1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}}.$$

Des formules du n° 205 on déduit, par un raisonnement analogue,

$$\frac{\theta\left(0, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(0)\theta_3(0)} = \frac{\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta'_1(0)\theta_2(0)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}},$$

$$\sqrt{1+k'}\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{1-k'}\,\theta_3\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = \theta_2^2(0)\sqrt{\frac{\pi}{2g\omega}},$$

et les formules (24) du n° 356 deviennent

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} \theta\left(z, \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\,\theta(z)\,\theta_3(z),\\ \theta_1\left(z, \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\,\theta_1(z)\,\theta_2(z),\\ \theta_2\left(z, \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi}{2g\omega}}\left[\sqrt{1-k'}\,\theta^2(z) - \sqrt{1+k'}\,\theta_1^2(z)\right],\\ \theta_3\left(z, \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi}{2g\omega}}\left[\sqrt{1+k'}\,\theta^2(z) - \sqrt{1-k'}\,\theta_1^2(z)\right]. \end{aligned}\right.$$

367. En divisant par deux la seconde période, on a de même

$$(63)\qquad \frac{g_2}{g} = 1 + k, \quad \sqrt{k'_2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \quad \sqrt{k_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}},$$

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= (1+k)\frac{\lambda(z)}{1+k\lambda^2(z)},\\ \mu\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{\mu(z)\,\nu(z)}{1+k\lambda^2(z)},\\ \nu\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{1-k\lambda^2(z)}{1+k\lambda^2(z)}. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$\frac{\theta_2\left(0, \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(0)\,\theta_3(0)} = \frac{\theta'_1\left(0, \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta'_1(0)\,\theta(0)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}},$$

$$\sqrt{1+k}\,\theta\left(0, \frac{\omega'}{2}\right) = \sqrt{1-k}\,\theta_3\left(0, \frac{\omega'}{2}\right) = \theta^2(0)\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}};$$

d'où

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_1\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\,\theta(z)\,\theta_1(z),\\ \theta_2\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\,\theta_2(z)\,\theta_3(z),\\ \theta\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\left[\theta^2(z) + \theta_1^2(z)\right],\\ \theta_3\left(z, \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\left[\theta^2(z) - \theta_1^2(z)\right]. \end{aligned}\right.$$

368. *Remarque I.* — De la division par deux de l'une des périodes, M. Hermite (*Comptes rendus*, 1863) a déduit des formules qui donnent immédiatement les expressions en séries de $\sqrt[4]{k}$ et de $\sqrt[4]{k'}$ trouvées par Jacobi. Si l'on considère les fonctions θ formées avec les deux constantes ω et $\omega+\omega'$, d'après les formules (52), la quantité $\sqrt[4]{k}$ devient $\sqrt[4]{\dfrac{k}{k'}}\,e^{\frac{\pi i}{8}}$, et les formules du numéro précédent donnent

$$
(66)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\theta_1\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt[4]{kk'}}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{\frac{2\pi}{g\omega}}\, \theta_1(z)\,\theta_3(z),\\
\theta_2\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt[4]{kk'}}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{\frac{2\pi}{g\omega}}\, \theta(z)\,\theta_2(z),\\
\theta\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{k'+ik}} \sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\, [\theta_3^2(z) + i\theta_1^2(z)],\\
\theta_3\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{k'-ik}} \sqrt{\frac{\pi}{g\omega}}\, [\theta_3^2(z) - i\theta_1^2(z)],
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions θ des seconds membres étant celles qui sont formées avec ω et ω'. A l'aide des deux premières formules de chacun des groupes (62), (65) et (66), on obtient les expressions suivantes des fonctions elliptiques :

$$
(67)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\lambda(z, \omega, \omega') &= \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\, \frac{\theta_1\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}}\, \frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\theta_2\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)},\\
\mu(z, \omega, \omega') &= \sqrt[4]{\frac{k'}{4k}}\, \frac{\theta_2\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \sqrt[4]{\frac{4k'^3}{k^3}}\, \frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\theta_1\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)},\\
\nu(z, \omega, \omega') &= \sqrt[4]{k'}\, e^{\frac{\pi i}{8}}\, \frac{\theta_3\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'^3}\, e^{-\frac{\pi i}{8}}\, \frac{\theta_1\left(z, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_1\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, dans les formules (8) du n° 74, on remplace q par l'une des quantités q^2, $\sqrt{q}$, $i\sqrt{q}$, et, dans le premier cas, ω par $\frac{\omega}{2}$, on obtient les développements des fonctions θ relatives aux trois couples de constantes

$\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$, $\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)$, $\left(\omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)$. En faisant ensuite $z = 0$ dans les deux dernières des équations précédentes, on trouve

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt[4]{k'} &= \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}, \\ \sqrt[4]{k} &= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{2n^2}}, \\ \sqrt[4]{k'^3} &= \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}(2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{-\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}}, \\ \sqrt[4]{k^3} &= 2\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{8}} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}(2n-1) q^{2n(n-1)}}{-\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Des formules précédentes on déduit aussi les expressions de certaines fonctions méromorphes considérées au n° 226,

$$\sqrt{[1+\lambda(z,\omega,\omega')][1+k\lambda(z,\omega,\omega')]} = \lambda(z, 2\omega, \omega') + \frac{\mu(z, 2\omega, \omega')}{\nu(z, 2\omega, \omega')},$$

$$\sqrt{[1+\lambda(z,\omega,\omega')][1-k\lambda(z,\omega,\omega')]} = \mu(z, 2\omega, \omega') + \frac{k'\lambda(z, 2\omega, \omega')}{\nu(z, 2\omega, \omega')}.$$

369. *Remarque II.* — Concevons que l'on divise la première pé-

riode plusieurs fois successivement par deux et appelons k_2, k_4, ..., les modules des fonctions elliptiques correspondantes. En remplaçant q par q^{2^m} dans la seconde des formules (52), on obtient

$$\sqrt[4]{k'_{2^m}} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - q^{(2n-1)2^m}}{1 + q^{(2n-1)2^m}}.$$

L'exposant $(2n-1)2^m$, dans lequel n et m sont quelconques, désignant tous les nombres pairs, on en déduit

$$\sqrt[4]{k'_2 k'_4 k'_8 \dots} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}},$$

et, en vertu des formules du n° 205, où l'on fait $g = 1$,

$$(69) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \sqrt{\frac{k'_2 k'_4 k'_8 \dots}{k'}}.$$

En remplaçant k'_2, k'_4, ... par leurs valeurs données par la formule (61), on a

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{k'} \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} \frac{2\sqrt{k'_2}}{1+k'_2} \frac{2\sqrt{k'_4}}{1+k'_4} \frac{2\sqrt{k'_8}}{1+k'_8} \dots,$$

et, en divisant membre à membre cette équation par la précédente,

$$(70) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \frac{2}{1+k'} \frac{2}{1+k'_2} \frac{2}{1+k'_4} \frac{2}{1+k'_8} \dots$$

Si l'on pose

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = k',$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

on a successivement

$$\frac{b_2}{a_2} = k'_2, \qquad \frac{b_3}{a_3} = k'_4, \qquad \frac{b_4}{a_4} = k'_8, \ldots,$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1+k'}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{2}{1+k'_2}, \quad \frac{a_3}{a_4} = \frac{2}{1+k'_4}, \ldots,$$

et la relation précédente devient

$$(71) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\frac{a_3}{a_4}\cdots$$

On en conclut, comme l'a observé Gauss, que les quantités a tendent vers une limite égale à $\frac{\pi}{\omega}$; les quantités b tendent vers la même limite.

Dans la formule

$$\nu(z, \omega, \omega') = \sqrt{k'} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2n-1)}}{1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2n-1)}},$$

déduite des formules (20) du n° 202, remplaçons q successivement par $q^2, q^4, q^8, \ldots$, sans changer ω, et faisons le produit des fonctions ainsi obtenues; nous aurons

$$\nu(z, \omega, 2\omega')\nu(z, \omega, 4\omega')\ldots = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{k'} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + 2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}},$$

et, par suite,

$$(72) \qquad \nu(z, \omega, 2\omega')\nu(z, \omega, 4\omega')\ldots = \frac{\omega}{\pi}\,\text{tang}\,\frac{\pi z}{\omega}\,\frac{\mu(z, \omega, \omega')}{\lambda(z, \omega, \omega')}.$$

Équation aux dérivées partielles de Jacobi.

370. Si dans les formules (8) du n° **74** on regarde ω comme une fonction arbitraire de q, les quatre fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$ deviennent des fonctions des deux variables indépendantes z et q, et d'après le calcul du n° **289**, elles satisfont à une même équation aux dérivées

partielles

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial \log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On obtient les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ en remplaçant dans ces formules (8) ω par $\frac{\omega}{n}$ et q par q^n; en regardant encore ω comme une fonction arbitraire de q, le même calcul montre que les quatre fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ vérifient l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial \log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2 n}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On obtient les fonctions $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ en remplaçant dans les formules (8) q par $q^{\frac{1}{n}}$; on reconnaît de la même manière que les quatre fonctions $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ satisfont aussi à l'équation (2).

Supposons maintenant que, dans toutes les fonctions précédentes, ω soit la fonction de q définie par la formule (31) du n° **205**, où l'on fait $g = 1$. Appelons k le module de la fonction $\lambda(z, \omega, \omega')$, lequel est donné par la formule (29) de ce même numéro. Nous pouvons inversement regarder q comme une fonction de k; alors ω est une fonction de k, et les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont des fonctions des deux variables indépendantes z et k. Les quantités ω et ω' sont aussi déterminées par les intégrales définies (3) et (5) du n° **221**, où l'on fait $g = 1$, et elles satisfont aux relations (33) et (34) du n° **279**. A l'aide de ces relations, nous avons opéré le changement de variable au n° **289**; l'équation (2) devient ainsi

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2n(k^2 - \mathrm{H})z\frac{\partial u}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial u}{\partial k} = 0.$$

Désignons par φ, φ_1, φ_2, φ_3, soit les quatre fonctions

$$(4)\qquad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)}{\theta(0,\omega)},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)}{\theta'_1(0,\omega)},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_2(0,\omega)},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_3(0,\omega)},$$

soit les quatre fonctions

$$(5)\qquad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta(0,\omega')},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta'_1(0,\omega')},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2(0,\omega')},\quad e^{-\frac{nHz^2}{2}}\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_3(0,\omega')};$$

ces fonctions φ joueront le même rôle que les fonctions $\mathrm{Al}(z)$; en répétant le calcul du n° **290**, on trouve qu'elles satisfont aux équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2nk^2z\frac{\partial\varphi}{\partial z}+2nkk'^2\frac{\partial\varphi}{\partial k}+n^2k^2z^2\varphi=0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+2nk^2z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+2nkk'^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}+(nk'^2+n^2k^2z^2)\varphi_1=0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+2nk^2z\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+2nkk'^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}+(n+n^2k^2z^2)\varphi_2=0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}+2nk^2z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+2nkk'^2\frac{\partial\varphi_3}{\partial k}+(nk^2+n^2k^2z^2)\varphi_3=0,
\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, les quatre fonctions

$$(7)\qquad U=\varphi(z),\quad U_1=\sqrt{k}\,\varphi_1(z),\quad U_2=\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\varphi_2(z),\quad U_3=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\varphi_3(z)$$

vérifient la même équation différentielle

$$(8)\qquad \frac{\partial^2U}{\partial z^2}+2nk^2z\frac{\partial U}{\partial z}+2nkk'^2\frac{\partial U}{\partial k}+n^2k^2z^2U=0.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (27) du n° 339 qu'en ce que n^2 est remplacé par n. Il en résulte que les quatre fonctions

$$(9)\qquad V=\frac{U}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad V_1=\frac{U_1}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad V_2=\frac{U_2}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad V_3=\frac{U_3}{\mathrm{Al}^n(z)}$$

satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$(10)\quad (1-2\alpha x^2+x^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2(n-1)(\alpha x-x^3)\frac{\partial V}{\partial x}+4n(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha}+n(n-1)x^2V=0,$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1-\frac{1-2k^2}{kk'}y^2-y^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(n-1)\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y+2y^3\right)\frac{\partial V}{\partial y}\\ &\qquad\qquad +2nk'\frac{\partial V}{\partial k}+n(n-1)\left(\frac{k}{k'}-y^2\right)V=0,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1-\frac{2-k^2}{k'}t^2+t^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(n-1)\left(\frac{2-k^2}{k'}t-2t^3\right)\frac{\partial V}{\partial t}\\ &\qquad\qquad -2nkk'\frac{\partial V}{\partial k}-n(n-1)\left(\frac{1}{k'}-t^2\right)V=0,\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit des équations (34), (36) et (38) des nos **340** et **341**, en remplaçant n^2 par n.

371. Ces quatre fonctions V ont pour expressions, à l'aide des θ,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} V&=\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)}, & V_1&=\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\\ V_2&=\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)}, & V_3&=\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\end{aligned}\right.$$

s'il s'agit de la division de la première période, et des expressions toutes pareilles s'il s'agit de la seconde période.

Lorsque n est impair, on a, d'après les formules (3) du n° **349**, et en vertu des relations du n° **205**,

$$(14)\quad V=\sqrt{\frac{g_1k'_1}{nk'}}\mathfrak{P},\quad V_1=\sqrt{\frac{g_1^3k_1k'_1}{nkk'}}\mathfrak{P}_1x,\quad V_2=\sqrt{\frac{g_1k_1}{nk}}\mathfrak{P}_2y,\quad V_3=\sqrt{\frac{g_1}{n}}\mathfrak{P}_3t.$$

On a aussi

$$V\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{t^n}V_3(z),\quad V\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{x^n}V_1(z),\quad V\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{y^n}V_2(z),$$

et, par suite,

$$(15)\quad V_1(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n V\left(\frac{1}{x}\right), \quad V_2(y) = y^n V\left(\frac{-i}{y}\right), \quad V_3(t) = t^n V\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour avoir les quatre polynômes $\mathfrak{P}$, il suffira donc de calculer le polynôme $V(x)$, qui est pair et du degré $n-1$. Si l'on pose $V = \Sigma a^{(m)} x^{2m}$, l'équation différentielle (10) donne une relation linéaire

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 4m(n-2m)\alpha a^{(m)} + 4n(1-\alpha^2)\frac{da^{(m)}}{d\alpha} \\ &\qquad + (n-2m+1)(n-2m+2)\,a^{(m-1)} = 0 \end{aligned} \right.$$

entre trois coefficients consécutifs. Le premier coefficient est $a^{(0)} = \sqrt{\frac{g_1 k'_1}{nk'}}$, le dernier $a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{g_1^3 k' k'_1}{nkk'}}$.

L'équation (35) du n° 279, qui peut être mise sous la forme

$$\omega^2 d\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{2\pi i}{kk'^2}\,dk,$$

a été établie en supposant le multiplicateur égal à l'unité; si le multiplicateur est égal à g, cette équation devient

$$g^2\omega^2 d\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{2\pi i}{kk'^2}\,dk.$$

En y remplaçant ω par $\frac{\omega}{n}$, on a

$$g_1^2\omega^2\frac{d\omega'}{d\omega} = -\frac{2n\pi i}{k_1 k_1'^2}\,dk_1,$$

d'où l'on déduit

$$(17)\qquad g_1^2 = \frac{nkk'^2}{k_1 k_1'^2}\frac{dk_1}{dk}.$$

Pour effectuer le calcul des polynômes $\mathfrak{P}$ par cette méthode, il faudra se servir de l'équation algébrique qui existe entre les modules k et k_1, équation dont il sera question plus tard.

CHAPITRE V.

DIVISION DE L'ARGUMENT DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

372. C'est la question inverse de celle qui a été traitée dans l'avant-dernier Chapitre. Nous avons trouvé les expressions de $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ en fonction de $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$. Proposons-nous maintenant, connaissant l'une des quantités $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$, de trouver $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$. Quand on donne $\mu(nz)$ ou $\nu(nz)$ et que l'on cherche $\mu(z)$ ou $\nu(z)$, l'équation est du degré n^2; si n est pair, elle s'abaisse au degré moitié; mais, quand on donne $\lambda(nz)$ et que l'on cherche $\lambda(z)$, l'équation est du degré n^2 si n est impair, du degré $2n^2$ si n est pair; dans ce dernier cas, l'équation, ne contenant que des puissances paires de l'inconnue, s'abaisse au degré n^2.

Lorsque la quantité donnée est prise arbitrairement, les racines de l'équation sont toutes différentes. Supposons que, n étant impair, on donne $y = \lambda(nz)$ et que l'on cherche $x = \lambda(z)$; l'inconnue est donnée par une équation du degré n^2

$$(1) \qquad yP - xP_1 = 0,$$

dans laquelle P et P_1 désignent des polynômes entiers pairs en x du degré $n^2 - 1$, et que l'on sait former, par un calcul de proche en proche, d'après la méthode d'Abel (n° 338), ou, directement, par celle de Jacobi (n° 342). A une valeur de y correspondent les valeurs de nz,

$$nz + 2p\omega + q\omega', \quad n\omega - nz + 2p\omega + q\omega',$$

et, par conséquent, les valeurs de x,

$$\lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \quad \lambda\left(\omega - z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

p et q étant deux nombres entiers quelconques; mais les valeurs de x données par cette dernière formule sont égales à celles que fournit la première; on en conclut que les n^2 racines de l'équation sont représentées par la formule

$$(2)\qquad x = \lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

dans laquelle chacun des deux nombres p et q reçoit n valeurs entières consécutives. Nous leur attribuerons les valeurs $-\frac{n-1}{2},\ldots,$ $-1, 0, 1,\ldots, \frac{n-1}{2}$.

Pour que deux valeurs de x soient égales, il faut que la somme de leurs arguments $2z + 2(p+p')\frac{\omega}{n} + (q+q')\frac{\omega'}{n}$ soit de la forme $(2m+1)\omega + m'\omega'$, ce qui exige que nz soit de la forme $(2m_1+1)\frac{\omega}{2} + m'_1\frac{\omega'}{2}$ et, par conséquent, que y soit égal à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{k}$.

Pour voir ce que deviennent les racines, nous distinguerons deux cas, suivant que le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ est pair ou impair. Dans le premier cas, lorsque $y = 1$, l'une des valeurs de nz est

$$\frac{\omega}{2} + \frac{n-1}{2}\omega = \frac{n\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\omega}{2},$$

et, par suite,

$$x = \lambda\left(\frac{\omega}{2} + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right);$$

la combinaison $p = 0$, $q = 0$ donne la racine simple $x = 1$; deux valeurs égales et de signes contraires de la quantité $2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$ donnant la même valeur de x, toutes les autres racines sont doubles : on en conclut que le polynôme $P - xP_1$ est égal au produit de $1 - x$ par un polynôme carré parfait. Lorsque $y = \frac{1}{k}$, l'une des valeurs de nz est de la forme

$$\frac{\omega+\omega'}{2} + \frac{n-1}{2}(\omega+\omega') = \frac{n(\omega+\omega')}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\omega+\omega'}{2},$$

et, par suite,

$$x = \lambda\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + 2p\,\frac{\omega}{n} + q\,\frac{\omega'}{n}\right);$$

la combinaison $p = 0$, $q = 0$ donne la racine simple $x = \frac{1}{k}$; toutes les autres racines sont doubles : on en conclut que le polynôme $P - kxP_1$ est égal au produit de $1 - kx$ par un polynôme carré parfait. Nous remarquons que si, dans l'équation (1), on remplace y par $-y$, les racines de la seconde équation sont égales à celles de la première et de signes contraires. Les cas où la quantité donnée y est égale à -1 ou à $-\frac{1}{k}$ se ramènent ainsi aux précédents. Il en résulte que les deux polynômes pairs P et P_1 satisfont aux deux identités

$$(3) \qquad P - xP_1 = (1 - x)G_1^2, \quad P - kxP_1 = (1 - kx)H_1^2,$$

G_1 et H_1 étant des polynômes entiers en x du degré $\frac{n^2 - 1}{2}$, et à celles qu'on en déduit en remplaçant x par $-x$.

Lorsque le nombre $\frac{n - 1}{2}$ est impair, on a les deux identités

$$(3') \qquad P - xP_1 = (1 + x)G_1^2, \quad P - kxP_1 = (1 + kx)H_1^2.$$

La considération des équations qui donnent $\mu(z)$ ou $\nu(z)$, quand on connaît $\mu(nz)$ ou $\nu(nz)$, conduit à des résultats analogues. La première admet des racines égales, lorsque la quantité donnée $\mu(nz)$ est égale à ± 1 ou à $\pm \frac{ik'}{k}$, la seconde, lorsque la quantité donnée $\nu(nz)$ est égale à ± 1 ou à $\pm k'$. On en déduit les identités

$$(4) \qquad P - \mu P_2 = (1 - \mu)G_2^2, \quad k'P - ik\mu P_2 = (k' - ik\mu)H_2^2,$$

$$(5) \qquad P - \nu P_3 = (1 - \nu)G_3^2, \quad k'P - \nu P_3 = (k' - \nu)H_3^2,$$

quel que soit le nombre impair n. D'après une remarque faite au n° 338, les secondes des relations (3) et (3′) se déduisent des premières, et les relations (5) des relations (4), en remplaçant k par $\frac{1}{k}$ et z par kz.

Division par deux.

373. Connaissant $X = \sqrt{k}\lambda(2z)$, cherchons $x = \sqrt{k}\lambda(z)$. La formule

$$\lambda(2z) = \frac{2\lambda(z)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^4(z)}$$

conduit à l'équation du huitième degré

$$X^2(1 - x^4)^2 - 4x^2(1 - 2\alpha x^2 + x^4) = 0;$$

c'est une équation réciproque

$$X^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4(X^2 - 2\alpha) = 0,$$

que l'on peut résoudre par des racines carrées. On en tire

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2(1 + \sqrt{1 - 2\alpha X^2 + X^4})}{X^2} = \frac{2(1 + \Delta X)}{X^2},$$

$$x^2 = \frac{1 + \Delta X + \sqrt{2(1 - \alpha X^2 + \Delta X)}}{X^2} = \frac{(1 + \sqrt{1 - kX^2})\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k}X^2}\right)}{X^2},$$

$$x = \sqrt{k\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k}X^2}}{1 - \sqrt{1 - kX^2}}};$$

les trois radicaux étant indépendants les uns des autres, cette formule donne huit valeurs différentes.

Il est facile de reconnaître *a priori* que les racines sont réciproques deux à deux; car elles sont représentées par les deux formules

$$x = \sqrt{k}\lambda\left(z + p\omega + q\frac{\omega'}{2}\right), \quad x = \sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2} - z + p\omega + q\frac{\omega'}{2}\right),$$

dont la première donne les quatre valeurs $\pm\sqrt{k}\lambda(z)$, $\pm\sqrt{k}\lambda\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$,

réciproques deux à deux, la seconde les quatre valeurs $\pm\sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2}-z\right)$, $\pm\sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2}-z+\frac{\omega'}{2}\right)$, qui sont aussi réciproques deux à deux.

Résolution de l'équation d'où dépend la division de l'argument par un nombre impair.

374. On effectuera la division de l'argument par un nombre impair quelconque, en le divisant successivement par les facteurs premiers de ce nombre. Nous venons d'effectuer la division par deux; il nous reste à voir comment s'opère la division par un nombre premier plus grand que deux. Nous supposerons plus généralement que le diviseur n est un nombre impair quelconque. Abel a démontré que l'on peut exprimer algébriquement les racines de l'équation (1), qui est du degré n^2, au moyen des quantités k et y, qui entrent dans cette équation, des racines de l'équation binôme $x^n=1$, et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

Nous ferons d'abord remarquer que, quand n est impair, les quantités $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et du module k, quel que soit le nombre entier p. Il résulte, en effet, des formules (14) du n° 332 et du calcul des polynômes P par la méthode d'Abel (n° 338), que ces quantités sont des fonctions rationnelles de k^2 et de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Mais la deuxième de ces formules (14) indique que la quantité $\mu\left(n\frac{\omega}{n}\right)$, c'est-à-dire -1, est égale au produit de $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$; on en déduit l'expression de $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. La troisième donne pareillement l'expression de $\nu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Ainsi les quantités $\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$ sont des fonctions rationnelles de k^2 et de $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$; la quantité $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)$

est égale au produit de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$.

On verrait, de la même manière, que les quantités $\lambda\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$ s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et de $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$, quel que soit le nombre entier q.

Les formules (1) du n° 318, relatives à l'addition des arguments, montrent ensuite que les trois quantités $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$ s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

375. Soient α et β deux racines, différentes ou non, de l'équation binôme $x^n = 1$. Considérons l'expression

$$\begin{array}{llll}
\lambda(z) & +\alpha\lambda\left(z+\frac{2\omega}{n}\right)+ & \ldots+\alpha^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}\right] \\
+\beta\lambda\left(z+\frac{\omega'}{n}\right) & +\alpha\beta\lambda\left(z+\frac{2\omega}{n}+\frac{\omega'}{n}\right)+ & \ldots+\alpha^{n-1}\beta\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}+\frac{\omega'}{n}\right] \\
+\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
+\beta^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right] & +\alpha\beta^{n-1}\lambda\left[z+\frac{2\omega}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right]+ & \ldots+\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right],
\end{array}$$

que nous représenterons par

$$(6)\qquad R(z,\alpha,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p\beta^q\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Remarquons d'abord que cette expression conserve la même valeur, quand p et q désignent n nombres entiers consécutifs quelconques; car, lorsqu'on augmente p d'une unité, les termes d'une même ligne horizontale se permutent circulairement; de même, lorsqu'on augmente q d'une unité, les termes d'une même colonne verticale se permutent circulairement.

Remplacer z par $z + \frac{2\omega}{n}$ et multiplier tous les termes par α revient à augmenter p d'une unité; de même, remplacer z par $z + \frac{\omega'}{n}$ et multiplier tous les termes par β revient à augmenter q d'une unité; on a donc

$$R\left(z + \frac{2\omega}{n}\right) = \alpha^{-1} R(z), \quad R\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = \beta^{-1} R(z).$$

Comme on a d'ailleurs $R(z + \omega) = -R(z)$, on en déduit

$$R\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = R\left(z + \omega - \frac{n-1}{2}\frac{2\omega}{n}\right) = -R\left(z - \frac{n-1}{2}\frac{2\omega}{n}\right),$$

et par suite

$$R\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -\alpha^{\frac{n-1}{2}} R(z).$$

Les valeurs de z qui rendent infinie la fonction $R(z)$ sont celles qui rendent infini l'un de ses termes et qui, par conséquent, satisfont à la relation

$$z + p\frac{2\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n} = \frac{\omega'}{2} + p'\omega + q'\omega',$$

d'où

$$nz = \frac{\omega'}{2} + (np' - 2p)\omega + \left(nq' - q + \frac{n-1}{2}\right)\omega'.$$

On peut déterminer les deux nombres entiers p et q plus petits que n et les deux nombres entiers p' et q', de manière que les deux coefficients $np' - 2p$, $nq' - q + \frac{n-1}{2}$ soient égaux à des nombres entiers quelconques. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que deux termes ne peuvent devenir infinis à la fois. On en conclut que la fonction $R(z)$ admet les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, chacun au premier degré.

La fonction $R(z)$ admet les périodes 2ω, ω'; mais la fonction

(7) $$f(z) = [R(z)]^n,$$

qui satisfait aux relations

$$f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=f(z),$$

admet les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$; elle a d'ailleurs les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, aux mêmes périodes, chacun au degré n. En vertu du théorème de M. Liouville (n° 161), elle s'exprime rationnellement à l'aide de la fonction $\lambda(nz)$ et de sa dérivée; comme elle ne devient infinie pour aucune valeur finie de $\lambda(nz)$, le dénominateur est constant, et l'on a

$$(8)\qquad f(z)=\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz),$$

M et N étant des polynômes entiers en $\lambda(nz)$; à cause de la relation $f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-f(z)$, le polynôme M est impair et du degré n, le polynôme N pair et du degré $n-3$ au plus. On en déduit

$$(9)\qquad \mathrm{R}(z,\alpha,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p\beta^q\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)=\sqrt[n]{\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)}.$$

A chaque combinaison de deux racines α et β, différentes ou non, de l'équation binôme $x^n=1$, correspond une équation analogue à la précédente. Remarquons que, d'après la formule (19) du n° 355, l'équation qui se rapporte à la combinaison $\alpha=\beta=1$ a son second membre égal à $n\lambda(nz)$. Si l'on ajoute ces n^2 équations membre à membre, chacun des termes $\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$ du premier membre, dans l'équation résultante, aura son coefficient nul, à l'exception du terme $\lambda(z)$, dont le coefficient sera égal à n^2, et l'on obtiendra la formule

$$(10)\qquad \lambda(z)=\frac{1}{n}\lambda(nz)+\frac{1}{n^2}\sum\sqrt[n]{\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)},$$

qui renferme n^2-1 radicaux.

376. Voici comment on peut calculer ces deux polynômes M et N.

Si l'on développe chacun des termes de la fonction $R(z)$ par la formule

$$\lambda(z+a) = \frac{\lambda'(a)\lambda(z) + \lambda(a)\lambda'(z)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)},$$

le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, la fonction $R(z)$ se composera de deux parties, l'une égale à une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, l'autre égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Il en sera de même de la fonction $f(z)$ ou $[R(z)]^n$. Si l'on prend la dérivée de l'expression de $\lambda(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$ (n° 332), la valeur de $\lambda'(nz)$ sera égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; on en déduit la valeur de $\lambda'(z)$ égale au produit de $\lambda'(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; la seconde partie deviendra ainsi égale au produit de $\lambda'(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, et l'on aura

$$f(z) = \frac{A + B\lambda'(nz)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda(z)$.

La fonction $f(z)$ ne changeant pas quand on remplace z par $z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$, les fractions rationnelles $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ ne changent pas quand on y remplace $\lambda(z)$ par l'une quelconque des valeurs de x données par la formule (2), c'est-à-dire par l'une quelconque des racines de l'équation (1). On prendra, pour chacune de ces fractions, la moyenne arithmétique de ses valeurs, lorsqu'on y remplace $\lambda(z)$ successivement par les n^2 racines de l'équation (1); cette moyenne arithmétique, étant une fonction symétrique des racines, s'exprimera rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation (1) et, par conséquent, à l'aide de k^2 de la quantité donnée $y = \lambda(nz)$. On arrivera ainsi à la forme (8).

L'expression trouvée de la sorte renferme, en outre, rationnellement les constantes $\lambda(a)$, $\mu(a)$, $\nu(a)$, a désignant les diverses quantités $2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$; mais ces constantes, d'après la remarque faite au n° 374, s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$. On en conclut que les deux polynômes M et N, entiers par

rapport à $\lambda(nz)$, renferment, en outre, rationnellement les trois constantes k^2, $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

377. La formule (10), qui donne les valeurs de l'inconnue, renferme n^2-1 radicaux; mais on peut les ramener à deux d'entre eux. Si l'on suppose que α et β soient deux racines primitives de l'équation binôme $x^n=1$, deux racines quelconques de cette équation pourront être représentées par α^r et β^s, r et s étant deux nombres entiers variant de 0 à $n-1$. La fonction

$$(11) \qquad F(z)=[R(z,\alpha,1)]^{n-r}[R(z,1,\beta]^{n-s}R(z,\alpha^r,\beta^s),$$

qui satisfait aux relations

$$F\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=(-1)^{r+s-1}F(z), \quad F\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=F(z),$$

admet, dans tous les cas, les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$; elle a les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, aux mêmes périodes, chacun au degré $2n-r-s+1$; on a donc

$$(12) \qquad F(z)=P+Q\lambda'(nz),$$

P et Q étant des polynômes entiers en $\lambda(nz)$. Quand le nombre $r+s$ est pair, le premier polynôme est impair, le second pair. Quand $r+s$ est impair, le premier est pair, le second impair. Le premier polynôme est donc du degré $2n-r-s+1$, le second du degré $2n-r-s-2$ au plus. On les calculera comme on a calculé les polynômes M et N dans le numéro précédent.

Des équations (11) et (12) on déduit

$$(13) \qquad R(z,\alpha^r,\beta^s)=\frac{P+Q\lambda'(nz)}{[R(z,\alpha,1)]^n[R(z,1,\beta)]^n}[R(z,\alpha,1)]^r[R(z,1,\beta)]^s.$$

Le premier facteur du second membre est une fraction rationnelle en $\lambda(nz)$ et $\lambda'(nz)$; de cette manière, tous les radicaux se ramènent aux

deux seuls radicaux $R(z, \alpha, 1)$, $R(z, 1, \beta)$, et la formule (10), après la substitution, ne donne plus que les n^2 valeurs de l'inconnue.

378. La fonction résolvante d'Abel se met sous la forme

$$R(z, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\sum \alpha^p \beta^q \frac{\theta_1\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

Nous supposerons maintenant que l'on attribue à chacune des lettres p et q les n valeurs consécutives $-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, +1, \dots, \frac{n-1}{2}$. Considérons le produit des dénominateurs; les nombres $2p$ donnant pour résidus par rapport à n les n nombres consécutifs $-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, et la fonction θ ne changeant pas quand l'argument augmente ou diminue de ω, ce produit est égal à

$$\prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right);$$

c'est la fonction $\theta(nz)$, multipliée par un facteur constant (n° **331**). Nous pouvons représenter deux racines quelconques de l'équation binôme $x^n = 1$ par $\alpha = e^{\frac{4a\pi i}{n}}$, $\beta = e^{\frac{-2b\pi i}{n}}$, a et b étant deux nombres entiers. La fonction holomorphe

$$\Phi(z) = R(z, \alpha, \beta)\theta(nz)$$

satisfait aux relations

$$\Phi\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -e^{-\frac{2a\pi i}{n}}\Phi(z), \quad \Phi\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2nz + \omega' - 2b\frac{\omega}{n}\right)}\Phi(z).$$

La fonction holomorphe

$$\Psi(z) = e^{\frac{2a\pi z i}{\omega}}\Phi\left(z + b\frac{\omega}{n^2} + a\frac{\omega'}{n^2}\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\Psi\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-\Psi(z),\quad \Psi\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2nz+\omega')}\Psi(z),$$

est égale à la fonction $\theta_1(nz)$, multipliée par un facteur constant (n° 150). On en déduit

$$\Phi(z)=\mathrm{A}e^{-\frac{2a\pi z i}{\omega}}\theta_1\left(nz-b\frac{\omega}{n}-a\frac{\omega'}{n}\right),$$

et, par suite,

$$\mathrm{R}(z,\alpha,\beta)=\mathrm{A}\frac{e^{-\frac{2a\pi z i}{\omega}}\theta_1\left(nz-b\frac{\omega}{n}-a\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta(nz)}. \tag{14}$$

On connaît ainsi les zéros de la fonction doublement périodique $\mathrm{R}(z)$, aux périodes 2ω, ω'; ils sont donnés par la formule

$$z=b\frac{\omega}{n^2}+a\frac{\omega'}{n^2}+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}, \tag{15}$$

dans laquelle a et b sont deux nombres entiers constants, caractérisant les deux racines α et β de l'équation binôme $x^n=1$, p et q deux nombres entiers arbitraires. On déterminera la constante A en faisant $z=\frac{\omega'}{2}$; on trouve

$$\mathrm{A}=(-1)^b\frac{n}{k}\frac{\theta'_1(0)}{\theta\left(b\frac{\omega}{n}+a\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

379. Considérons maintenant la résolvante $\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})$; d'après la formule (6), on a

$$\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})=-\mathrm{R}(-z,\alpha,\beta);$$

les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathrm{R}(z,\alpha,\beta)$, $\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})$ sont donc des quantités conjuguées $\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)$, $\mathrm{M}-\mathrm{N}\lambda'(nz)$. Pour avoir l'expression de la seconde résolvante, il suffit de changer les signes des nombres entiers a et b dans la formule (14); la constante A

ne change pas; on en déduit

$$R(z, \alpha, \beta) R(z, \alpha^{-1}, \beta^{-1}) = A^2 \frac{\theta_1\left(nz - b\frac{\omega}{n} - a\frac{\omega'}{n}\right)\theta_1\left(nz + b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta^2(nz)},$$

et, par suite, en vertu de la seconde des relations (7) du n° **329**,

$$(16)\qquad R(z, \alpha, \beta) R(z, \alpha^{-1}, \beta^{-1}) = n^2\left[\lambda^2(nz) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)\right].$$

Les radicaux conjugués se ramènent ainsi l'un à l'autre.

En élevant les deux membres de l'équation (16) à la $n^{\text{ième}}$ puissance, on obtient la relation

$$M^2 - N^2\lambda'^2(nz) = n^{2n}\left[\lambda^2(nz) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)\right]^n.$$

Si l'on pose $M = n^n M_1$, $N = n^n N_1$, $\rho = \lambda\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)$, cette relation devient

$$(17)\qquad M_1^2 - N_1^2(1 - y^2)(1 - k^2y^2) = (y^2 - \rho^2)^n.$$

Elle peut faciliter le calcul des polynômes M_1 et N_1 en y : le premier, qui est impair et du degré n, renferme $\frac{n+1}{2}$ coefficients; le second, qui est pair et du degré $n-3$, en renferme $\frac{n-1}{2}$, ce qui, avec ρ, fait $n+1$ inconnues. L'identification des deux membres donne $n+1$ équations entre ces inconnues. Mais la constante ρ est l'une des racines x, autre que zéro, de l'équation (1), dans laquelle on fait $y = 0$. Comme à chaque valeur de ρ^2 correspond un couple de polynômes M_1 et N_1, les coefficients pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de ρ^2, en tenant compte de l'équation qui détermine cette quantité. On retrouverait d'ailleurs cette équation en éliminant les n coefficients des polynômes M_1 et N_1 entre les $n+1$ équations provenant de l'identification.

Multiplication de la première période par un nombre impair.

380. Dans le Chapitre précédent, nous avons trouvé les expressions de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ et de $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ en fonction de $\lambda(z, \omega, \omega')$. Il s'agit

maintenant, connaissant $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ ou $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, de trouver $\lambda(z, \omega, \omega')$.

Proposons-nous d'abord, connaissant $y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, de trouver $x = \lambda(z, \omega, \omega')$; on a l'équation du $n^{ième}$ degré (n° 349)

$$y\varphi - \frac{g_1}{g} x \varphi_1 = 0. \tag{18}$$

Les n valeurs de l'inconnue sont comprises dans la formule

$$x = \lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right), \tag{19}$$

dans laquelle p reçoit n valeurs entières consécutives.

On voit, comme au n° 372, que l'équation a des racines égales lorsque la quantité donnée y est égale à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{k_1}$. Quand le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ est pair, si $y = 1$, l'équation admet la racine simple $x = 1$, et toutes les autres racines sont doubles; si $y = \frac{1}{k_1}$, elle admet la racine $x = \frac{1}{k}$, et toutes les autres racines sont encore doubles. On en conclut que les polynômes pairs φ et φ_1 satisfont aux deux identités

$$\varphi - \frac{g_1}{g} x \varphi_1 = (1 - x) G^2, \quad \varphi - \frac{g_1}{g} k_1 x \varphi_1 = (1 - kx) H^2, \tag{20}$$

G et H étant des polynômes entiers du degré $\frac{n-1}{2}$, et à celles qu'on en déduit en remplaçant x par $-x$. Quand le nombre $\frac{n-1}{2}$ est impair, on a les deux identités

$$\varphi - \frac{g_1}{g} x \varphi_1 = (1 + x) G^2, \quad \varphi - \frac{g_1}{g} k_1 x \varphi_1 = (1 + kx) H^2. \tag{20'}$$

Pour résoudre l'équation (18), nous nous servirons de la fonction

$$\mathfrak{A}(z, \alpha) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p \lambda\left(z + p\frac{2\omega}{n}\right), \tag{21}$$

qui, comme la fonction $R(z, \alpha, \beta)$, satisfait aux relations

$$\mathfrak{R}\left(z+\frac{2\omega}{n}\right)=\alpha^{-1}\mathfrak{R}(z),\quad \mathfrak{R}(z+\omega)=-\mathfrak{R}(z),\quad \mathfrak{R}\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-\alpha^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{R}(z).$$

Cette fonction admet les deux périodes 2ω, ω'; mais la fonction

$$f(z)=[\mathfrak{R}(z)]^n,$$

qui satisfait aux relations

$$f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-f(z),\quad f(z+\omega')=f(z),$$

admet les périodes $\frac{2\omega}{n}$, ω'; elle a d'ailleurs les mêmes infinis que la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, aux mêmes périodes, chacun au degré n. On a donc

$$(22)\qquad f(z)=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, le premier impair et du degré n, le second pair et du degré $n-3$ au plus. On en déduit

$$(23)\qquad \mathfrak{R}(z,\alpha)=\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right)=\sqrt[n]{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

A chaque racine α de l'équation binôme $x^n=1$ correspond une équation analogue à la précédente. D'après la formule (18) du n° 354, l'équation qui se rapporte à la racine $\alpha=1$ a pour second membre $\frac{g_1k_1}{gk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$. Si l'on ajoute membre à membre ces n équations, chacun des termes $\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right)$, dans le premier membre de l'équation résultante, aura son coefficient nul, excepté le terme $\lambda(z)$, dont le coefficient sera égal à n, et l'on obtiendra la formule

$$(24)\qquad \lambda(z,\omega,\omega')=\frac{g_1k_1}{ngk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)+\frac{1}{n}\sum\sqrt[n]{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)},$$

qui renferme $n-1$ radicaux.

La méthode suivie au n° 376 permet de calculer les polynômes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. Si l'on développe chaque terme, la fonction $\mathfrak{R}(z)$ se compose de deux parties, l'une égale à une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, l'autre égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Il en sera de même de la fonction $f(z) = [\mathfrak{R}(z)]^n$. De la dérivée de l'expression de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, on déduit $\lambda'(z)$ égale au produit de $\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; la seconde partie deviendra ainsi égale au produit de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, et l'on aura

$$f(z) = \frac{A + B\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda(z)$.

La fonction $f(z)$ ne changeant pas quand on remplace z par $z + p\frac{2\omega}{n}$, les fractions rationnelles $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ ne changent pas quand on remplace $\lambda(z)$ par l'une quelconque des valeurs de x données par la formule (19). On prendra, pour chacune de ces fractions, la moyenne arithmétique de ses valeurs quand on y remplace $\lambda(z)$ successivement par les n racines de l'équation (18); cette moyenne arithmétique, étant une fonction symétrique des racines, s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation et, par conséquent, à l'aide de la quantité donnée $y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ et des deux constantes k^2 et $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. On arrive ainsi à la forme (22).

381. On peut ramener à un seul les $n - 1$ radicaux que renferme la formule (24). Désignons par α une racine primitive de l'équation binôme $x^n = 1$ et par α^r une racine quelconque. La fonction

$$(25) \qquad F(z) = [\mathfrak{R}(z, \alpha)]^{n-r}\mathfrak{R}(z, \alpha^r),$$

satisfaisant aux relations

$$F\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^r F(z), \quad F(z + \omega') = F(z),$$

admet, dans tous les cas, les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, ω'; elle a les mêmes infinis que la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, aux mêmes périodes, chacun au degré $n - r + 1$; on a donc

$$F(z) = P + Q\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right), \tag{26}$$

P et Q étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$. Quand r est pair, le premier polynôme est pair, le second impair; c'est le contraire qui a lieu quand r est impair. Il en résulte que le premier polynôme est du degré $n - r + 1$, le second du degré $n - r - 2$ au plus. On les calculera comme on a calculé les polynômes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. On déduit de là

$$\mathfrak{R}(z, \alpha^r) = \frac{P + Q\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{[\mathfrak{R}(z, \alpha)]^n}[\mathfrak{R}(z, \alpha)]^r. \tag{27}$$

Les $n - 1$ radicaux se ramènent ainsi au radical $\mathfrak{R}(z, \alpha)$, et la formule (24), après la substitution, ne donne plus que les n valeurs de l'inconnue.

382. La résolvante peut être mise sous la forme (n° 173)

$$\mathfrak{R}(z, \beta) = \frac{1}{i\sqrt{k}} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \alpha^p \frac{\vartheta_1\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right)}{\vartheta\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Concevons que l'on réduise les n fractions au même dénominateur, et prenons pour dénominateur commun la fonction $\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$. Le numérateur, ou la fonction holomorphe

$$\varphi(z) = \mathfrak{R}(z, \alpha)\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\varphi(z + \omega') = -\varphi(z), \quad \varphi\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -e^{\frac{\pi i}{\omega'}\left(2z - 2\alpha\frac{\omega'}{n} + \frac{\omega}{n}\right)}\varphi(z),$$

si l'on pose, comme précédemment, $\alpha = e^{\frac{4a\pi i}{n}}$, est égal à la fonction $\vartheta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, multipliée par un facteur constant (n° **150**). On a donc

$$(28) \quad \mathfrak{R}(z, \alpha) = \mathcal{A}_1 \frac{\vartheta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)} = \mathcal{A} \frac{e^{-\frac{2a\pi z i}{\omega}} \theta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

On connaît ainsi les zéros de la fonction $\mathfrak{R}(z, \alpha)$; ils sont donnés par la formule $z = a\frac{\omega'}{n} + p\frac{\omega}{n} + q\omega'$. En faisant $z = \frac{\omega'}{2}$, on trouve

$$(29) \quad \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{gk} \frac{\vartheta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\vartheta\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{gk} \frac{\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

La résolvante $\mathfrak{R}(z, \alpha^{-1})$ étant égale à $-\mathfrak{R}(-z, \alpha)$, les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathfrak{R}(z, \alpha)$, $\mathfrak{R}(z, \alpha^{-1})$ sont des quantités conjuguées $\mathfrak{M} + \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$, $\mathfrak{M} - \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$. Pour avoir l'expression de la seconde résolvante, il suffit de changer le signe du nombre entier a dans la formule (28); on en déduit

$$\mathfrak{R}(z, \alpha)\mathfrak{R}(z, \alpha^{-1}) = \mathcal{A}^2 \frac{\theta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\theta_1\left(z + a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta^2\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)},$$

et par suite (n° **329**)

$$(30) \quad \mathfrak{R}(z, \alpha)\mathfrak{R}(z, \alpha^{-1}) = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^2 \left[\lambda^2\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) - \lambda^2\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\right].$$

Les radicaux conjugués se ramènent ainsi l'un à l'autre.

Si l'on pose $\mathfrak{M} = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^n \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N} = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^n \mathfrak{N}_1$, $\rho_1 = \lambda\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, en élevant les deux membres de l'équation précédente à la $n^{\text{ième}}$ puis-

sance, on obtient la relation

$$(31) \qquad \mathfrak{N}_1^2 - \mathfrak{M}_1^2(1-y^2)(1-k_1^2y^2) = (y^2-\rho_1^2)^n,$$

qui a la même forme que la relation (17), et qui pourra servir dans le calcul des coefficients des polynômes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$, à l'aide de la constante ρ_1, que l'on regardera comme connue; à chaque valeur de ρ_1 correspond un couple de polynômes.

Multiplication de la seconde période par un nombre impair.

383. Le même raisonnement s'applique à la multiplication de la seconde période. En désignant par y la quantité donnée $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ et par x l'inconnue $\lambda(z, \omega, \omega')$, on a l'équation du $n^{ième}$ degré (n° 351)

$$(32) \qquad y\,\mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,x\,\mathfrak{P}'_1 = 0.$$

Les valeurs de l'inconnue sont comprises dans la formule

$$x = \lambda\left(z + q\,\frac{\omega'}{n}\right).$$

L'équation a des racines égales lorsque la quantité donnée y est égale à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{k_2}$; quand $y = 1$, elle admet la racine simple $x = 1$ et toutes les autres racines sont doubles; quand $y = \frac{1}{k_2}$, elle admet la racine simple $x = \frac{1}{k}$ et toutes les autres racines sont encore doubles. On en conclut que les polynômes $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}'_1$ satisfont, quel que soit le nombre impair n, aux deux identités

$$(33) \qquad \mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,x\,\mathfrak{P}'_1 = (1-x)\,G^2, \quad \mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,k_2\,x\,\mathfrak{P}'_1 = (1-kx)\,H^2,$$

G et H étant des polynômes entiers en x du degré $\frac{n-1}{2}$.

On résoudra l'équation (32) à l'aide de la fonction

$$(34)\qquad \mathfrak{R}(z,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\beta^q\lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}\right),$$

qui satisfait aux relations

$$\mathfrak{R}(z+\omega)=-\mathfrak{R}(z),\quad \mathfrak{R}\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=\beta^{-1}\mathfrak{R}(z).$$

La fonction

$$f(z)=[\mathfrak{R}(z)]^n,$$

qui satisfait aux relations

$$f(z+\omega)=-f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=f(z),$$

admet les périodes 2ω, $\frac{\omega'}{n}$, et l'on a

$$(35)\qquad f(z)=\mathfrak{M}'+\frac{1}{g_1}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right),$$

$\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)$, le premier impair et du degré n, le second pair et du degré $n-3$ au plus. On en déduit

$$(36)\qquad \mathfrak{R}(z,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\beta^q\lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}\right)=\sqrt[n]{\mathfrak{M}'+\frac{1}{g_1}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)},$$

et par suite

$$(37)\qquad \lambda(z,\omega,\omega')=\frac{g_1k_1}{ngk}\lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum\sqrt[n]{\mathfrak{M}'+\frac{1}{g_1}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

On calculera les polynômes $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ comme les précédents. On peut de même réduire les $n-1$ radicaux à un seul par la relation

$$(38)\qquad \mathfrak{R}(z,\beta^t)=\frac{P'+\frac{1}{g_1}Q'\lambda'\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)[\mathfrak{R}(z,\beta)]^t}{[\mathfrak{R}(z,\beta)]^n},$$

β étant une racine primitive de l'équation binôme $x^n=1$.

384. La résolvante peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{A}(z,\beta)=\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\beta^q\frac{\theta_1\left(z+q\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z+q\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

Concevons que l'on réduise les fractions au même dénominateur, et prenons pour dénominateur commun $\theta\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)$; le numérateur, ou la fonction holomorphe

$$\varphi(z)=\mathfrak{A}(z,\beta)\theta\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\varphi(z+\omega)=-\varphi(z),\quad \varphi\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z-2b\frac{\omega}{n}+\frac{\omega'}{n}\right)}\varphi(z),$$

si l'on pose $\beta=e^{-\frac{2b\pi i}{n}}$, est égal à la fonction $\theta_1\left(z-b\frac{\omega}{n},\omega,\frac{\omega'}{n}\right)$, multipliée par un facteur constant. On a donc

$$(39)\quad \mathfrak{A}(z,\beta)=\mathfrak{B}\frac{\theta_1\left(z-b\frac{\omega}{n},\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}=\mathfrak{B}_1e^{\frac{2b\pi zi}{\omega'}}\frac{\vartheta_1\left(z-b\frac{\omega}{n},\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}{\vartheta\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

On connaît les zéros $z=b\frac{\omega}{n}+p\omega+q\frac{\omega'}{n}$ de la fonction $\mathfrak{A}(z,\beta)$. En faisant $z=\frac{\omega'}{2n}$, on trouve

$$(40)\quad \mathfrak{B}=(-1)^b\frac{1}{gk}\frac{\theta'_1\left(0,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(b\frac{\omega}{n},\omega,\frac{\omega'}{n}\right)},\quad \mathfrak{B}_1=-(-1)^b\frac{1}{gk}\frac{\vartheta'_1\left(0,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}{\vartheta\left(b\frac{\omega}{n},\omega,\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

La résolvante $\mathfrak{A}(z,\beta^{-1})$ étant égale à $-\mathfrak{A}(-z,\beta)$, les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathfrak{A}(z,\beta)$, $\mathfrak{A}(z,\beta^{-1})$ sont des quantités

conjuguées $\mathfrak{M}' + \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\mathfrak{M}' - \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$. On a d'ailleurs

$$(41) \qquad \mathfrak{A}(z, \beta)\mathfrak{A}(z, \beta^{-1}) = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^2 \left[\lambda^2\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)\right],$$

et les radicaux conjugués se ramènent l'un à l'autre. Si l'on pose

$\mathfrak{M}' = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^n \mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{N}' = \left(\frac{g_1 k_1}{gk}\right)^n \mathfrak{N}'_1$, $\rho_2 = \lambda\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, on obtient la relation

$$(42) \qquad \mathfrak{M}_1'^2 - \mathfrak{N}_1'^2(1 - y^2)(1 - k_1^2 y^2) = (y^2 - \rho_2^2)^n,$$

analogue à la relation (31), et qui pourra servir dans le calcul des coefficients des polynômes $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ à l'aide de la constante ρ_2, que l'on regardera comme connue. A chaque valeur de ρ_2 correspond un couple de polynômes.

Les trois relations (17), (31) et (42) ont la même forme; chacune d'elles renferme le module de la fonction donnée; elles diffèrent par la signification de la constante ρ.

385. *Remarque.* — Nous avons traité le problème de la division de l'argument par un nombre impair n, en résolvant une équation du degré n^2. On peut traiter la même question en résolvant successivement deux équations du degré n. On donne $y = \lambda(nz, \omega, \omega') = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$; cherchons d'abord $t = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; c'est la multiplication de la seconde période par n (n° 383). On a à résoudre l'équation du $n^{ième}$ degré

$$\frac{ng}{g_1} t \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{t^2}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}\right] - y \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k_1^2 t^2 \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\right] = 0.$$

La formule (37) devient

$$(43) \qquad t = \frac{gk}{g_1 k_1}\left(y + \Sigma \sqrt[n]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1 \Delta y}\right).$$

Les polynômes $\mathfrak{M}'_1$ et $\mathfrak{N}'_1$ en y satisfont à la relation

(44) $$\mathfrak{M}'^2_1 - \mathfrak{N}'^2_1(1-y^2)(1-k^2y^2) = (y^2-\rho_2^2)^n,$$

où $\rho_2 = \lambda\left(b\frac{\omega}{n^2}, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \lambda\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$.

Connaissant $t = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, on cherchera ensuite $x = \lambda(z, \omega, \omega')$; c'est la multiplication de la première période (n° 380). On a à résoudre une seconde équation du $n^{ième}$ degré

$$\frac{g_1}{g}x \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\right] - t \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2x^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\right] = 0.$$

La formule (24) devient

(45) $$x = \frac{g_1k_1}{ngk}\left(t + \Sigma\sqrt[n]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t}\right).$$

Les polynômes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ en t satisfont à la relation

(46) $$\mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{N}_1^2(1-t^2)(1-k_1^2t^2) = (t^2-\rho_1^2)^n,$$

où $\rho_1 = \lambda\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; cette dernière constante est une fraction rationnelle de $\lambda\left(a\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$. D'après les formules du n° 349, les deux constantes k_1 et $\frac{g_1}{g}$ sont des fonctions rationnelles de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Ainsi toutes les constantes qui entrent dans ces calculs s'expriment rationnellement au moyen du module donné k et des deux constantes $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$; ceci est bien d'accord avec ce que nous avons dit au n° 376.

Appliquons cette méthode au cas où $n = 3$. Les deux formules (43) et (45) renferment chacune deux radicaux conjugués, qui se ramènent immédiatement l'un à l'autre, en vertu des relations (30) et (41); on a donc

$$t = \frac{gk}{g_1k_1}\left[y + \sqrt[3]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1\Delta y} + \frac{y^2-\rho_2^2}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1\Delta y}}\right],$$

$$x = \frac{g_1k_1}{3gk}\left[t + \sqrt[3]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t} + \frac{t^2-\rho_1^2}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t}}\right].$$

Le calcul des polynômes n'offre aucune difficulté. L'identification des deux membres de l'équation (44) ou (46) donne

$$\mathcal{N}'_1 = \rho_2^3, \quad \mathcal{M}'_1 = y^3 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2(k^2\rho_2^4 - 3)y,$$
$$\mathcal{N}'_1 = \rho_1^3, \quad \mathcal{M}'_1 = t^3 + \tfrac{1}{2}\rho_1^2(k_1^2\rho_1^4 - 3)t.$$

On peut supposer $a = b = 1$, d'où $\rho_2 = \lambda\left(\frac{\omega}{3}\right)$, $\rho_1 = \lambda\left(\frac{\omega'}{3}, \frac{\omega}{3}\right)$.

Calcul de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$.

386. Les formules précédentes renferment rationnellement le module k et les constantes $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{n}\right)$; ces dernières quantités sont deux des racines de l'équation $P_1 = 0$, à laquelle se réduit l'équation (1), quand on y fait $y = 0$, et qu'après avoir supprimé la solution $x = 0$ on regarde x^2 comme l'inconnue. Nous savons former le polynôme pair P_1 du degré $\frac{n^2-1}{2}$ par rapport à x^2; les coefficients sont des polynômes entiers en k^2, qui ont eux-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Nous nous bornerons, dans l'étude de cette équation, au cas où le nombre impair n est premier et nous poserons $n = 2m + 1$. Nous supposerons en outre le multiplicateur g égal à l'unité.

Les racines de l'équation $P_1 = 0$, qui est du degré $m(n+1)$, sont représentées par la formule $x^2 = \lambda^2\left(p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)$, dans laquelle p et q désignent deux nombres entiers quelconques. On peut remplacer les nombres p et q par leurs résidus relatifs au diviseur n, et prendre ces résidus positifs ou négatifs, de manière que leurs valeurs absolues soient inférieures ou égales à m; d'ailleurs on peut supposer l'un d'eux positif. Nous obtiendrons donc toutes les racines en combinant avec $q = 0$ les m valeurs positives $1, 2, \ldots, m$ de p, et avec les m valeurs positives $1, 2, \ldots, m$ de q les n valeurs consécutives $0, \pm 1 \pm 2, \ldots, \pm m$ de p. Les m premières racines sont comprises dans la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)$. Les mn suivantes peuvent être représentées par la formule $\lambda^2\left(q\frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$,

dans laquelle t reçoit n valeurs entières consécutives; car les n multiples consécutifs du nombre $2q$ premier avec n donnent pour résidus par rapport à n les n nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$; de cette manière, nous disposerons les $m(n+1)$ racines en $n+1$ suites, comprenant chacune m racines. Les racines de la première suite sont données par la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, dans laquelle p varie de 1 à m; celles d'une autre suite par la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega'+2t\omega}{n}\right)$, dans laquelle t est un nombre constant et p varie de 1 à m. Désignons, en général, par ε l'une des $n+1$ quantités $\frac{\omega}{n}, \frac{\omega'+2t\omega}{n}$; les m racines d'une suite quelconque seront

$$(47)\qquad \lambda^2(\varepsilon),\quad \lambda^2(2\varepsilon),\quad \lambda^2(3\varepsilon),\ldots,\quad \lambda^2(m\varepsilon).$$

Remarquons que, si l'on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier premier avec n, ces m racines se reproduisent dans un autre ordre.

387. Cela posé, appelons ξ une fonction symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47), et concevons que dans cette fonction on remplace les quantités $\lambda^2(2\varepsilon), \lambda^2(3\varepsilon), \ldots, \lambda^2(m\varepsilon)$ par leurs expressions rationnelles à l'aide de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, d'après les formules relatives à la multiplication de l'argument, ξ sera une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, que nous désignerons par $F[\lambda^2(\varepsilon)]$. Supposons que, dans l'expression de la fonction ξ, on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier, positif, inférieur ou égal à m; comme nous venons de le remarquer, les m quantités de la suite (47) se permutent, et, par conséquent, la fonction symétrique ξ de ces m quantités conserve la même valeur; on aura donc

$$F[\lambda^2(a\varepsilon)] = F[\lambda^2(\varepsilon)].$$

Ainsi, la fonction $F(x^2)$ jouit de cette propriété de conserver la même valeur, quand on y remplace x^2 par l'une quelconque des m racines d'une même suite. La fonction ξ est donc égale à la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction F, portant successivement sur les m racines de la suite, et l'on a

$$\xi = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{p=m} F[\lambda^2(p\varepsilon)].$$

La quantité ε ayant $n+1$ valeurs différentes, la fonction ξ a elle-même $n+1$ valeurs différentes, une pour chaque suite. La somme de ces $n+1$ valeurs de ξ, savoir $\frac{1}{m}\Sigma\Sigma F(x^2)$, est une fonction symétrique et rationnelle des $m(n+1)$ racines de l'équation $P_1=0$; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen des coefficients de cette équation, c'est-à-dire au moyen de k^2.

Toute autre fonction symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47) jouira des mêmes propriétés; elle aura $n+1$ valeurs, dont la somme s'exprimera rationnellement au moyen de k^2. Telles sont les fonctions $\xi^2, \xi^3, \ldots$. On en conclut que les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de l'équation

$$(48)\qquad \xi^{n+1}+A_1\xi^n+A_2\xi^{n-1}+,\ldots,+A_{n+1}=0,$$

du degré $n+1$, qui admet pour racines les $n+1$ valeurs de ξ, sont des fonctions rationnelles de k^2.

Une autre fonction symétrique et rationnelle η des quantités de la suite (47) satisfera à une équation analogue à la précédente; mais, comme à chaque système de valeurs de k^2 et de ξ correspond une seule valeur de η, on conclut, d'après un raisonnement pareil à celui du n° 182, que η s'exprimera rationnellement au moyen de k^2 et de ξ.

388. Considérons maintenant l'équation

$$(49)\qquad u^m-B_1u^{m-1}+B_2u^{m-2}-,\ldots,\pm B_m=0$$

du degré m, dont les racines sont les m quantités de la suite (47). D'après ce que nous venons de dire, les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de l'équation, étant des fonctions symétriques et rationnelles de ces quantités, s'expriment rationnellement au moyen de k^2 et de ξ.

Cette dernière équation peut être résolue par la méthode d'Abel. Appelons, en effet, α une racine de l'équation binôme $x^m=1$, et r un nombre entier, inférieur à n, et qui soit racine primitive de ce nombre premier n. Puisque r^{n-1} ou r^{2m} donne le résidu 1 par rapport au diviseur n, r^m donnera le résidu -1; il en résulte que les puissances $r^0, r^1, r^2, \ldots, r^{m-1}$ donnent pour résidus les m premiers nombres

1, 2,..., m, affectés chacun de l'un des signes + ou − ; d'après cela, les m quantités de la suite (47) seront représentées par la formule $x^2 = \lambda^2(r^s\varepsilon)$, dans laquelle on attribue à l'exposant s les m valeurs 0, 1, 2,..., $m - 1$.

La fonction

$$(50) \qquad \mathfrak{A}(\varepsilon, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=m-1} \alpha^s \lambda^2(r^s\varepsilon)$$

satisfaisant à la relation

$$\mathfrak{A}(r\varepsilon) = \alpha^{-1}\mathfrak{A}(\varepsilon),$$

la fonction $f(\varepsilon) = [\mathfrak{A}(\varepsilon)]^m$ satisfait à la relation

$$f(r\varepsilon) = f(\varepsilon).$$

Si l'on remplace les quantités $\lambda^2(r^s\varepsilon)$ par leurs expressions rationnelles au moyen de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, comme nous avons fait précédemment, la fonction $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ deviendra une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$: il en sera de même de la fonction $f(\varepsilon)$; nous désignerons cette dernière fonction, ainsi transformée, par $\psi[\lambda^2(\varepsilon)]$. A cause de la relation $f(r^s\varepsilon) = f(\varepsilon)$, la fonction ψ conserve la même valeur quand on y remplace la racine $\lambda^2(\varepsilon)$ par une autre racine quelconque $\lambda^2(r^s\varepsilon)$ de la suite (47). La fonction $f(\varepsilon)$ est donc égale à la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction ψ portant successivement sur les m racines de la suite, et l'on a

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{s=m-1} \psi[\lambda^2(r^s\varepsilon)].$$

Le second membre, étant une fonction symétrique des racines de l'équation (49), s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de cette équation : ce sera donc une fonction rationnelle M de k^2 et de ξ. On en déduit

$$(51) \qquad \mathfrak{A}(\varepsilon, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=m-1} \alpha^s \lambda^2(r^s\varepsilon) = \sqrt[m]{\mathrm{M}}.$$

A chaque racine de l'équation binôme $x^m = 1$ correspond une équa-

tion analogue à la précédente. Le second membre de l'équation qui se rapporte à la racine $\alpha = 1$ est égal à la somme des racines de l'équation (49), c'est-à-dire à B_1. En ajoutant membre à membre les m équations ainsi obtenues, on arrive à la formule

$$(52) \qquad u = x^2 = \lambda^2(\varepsilon) = \frac{1}{m}\left(B_1 + \Sigma \sqrt[m]{M}\right),$$

qui renferme $m - 1$ radicaux.

On ramène ces radicaux à un seul en observant que, si α est une racine primitive de l'équation binôme $x^m = 1$, l'expression

$$\mathfrak{R}(\varepsilon, \alpha)^{m-s}\,\mathfrak{R}(\varepsilon, \alpha^s)$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation (49) et, par conséquent, une fonction rationnelle de k^2 et de ξ.

Ainsi, la résolution de l'équation $P_1 = 0$ du degré $m(n+1)$, par rapport à l'inconnue x^2, est ramenée à la résolution d'une équation (48) du degré $n + 1$ par rapport à une inconnue auxiliaire ξ, de telle sorte que les valeurs de x^2 s'expriment par des radicaux à l'aide des $n + 1$ valeurs de ξ.

389. Étant donnée une fonction elliptique $\lambda(z, k)$, dont le multiplicateur est égal à l'unité, nous avons vu (n° 363) que la division par un nombre impair et premier n de l'une quelconque des périodes définies par les relations (41) du n° 360 donne $n + 1$ fonctions différentes, savoir : la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega\right)$ et les n fonctions $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$, t recevant n valeurs entières consécutives. Si l'on désigne, comme précédemment, par ε l'une des $n + 1$ quantités $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega' + 2t\omega}{n}$, on déterminera le module k_1 et le multiplicateur g_1 de ces diverses fonctions par les formules

$$(53) \qquad \sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=m} \frac{1 - \lambda^2(p\varepsilon)}{1 - k^2\lambda^2(p\varepsilon)}, \quad g_1 = \pm \prod_{p=1}^{p=m} \frac{\lambda^2(p\varepsilon)[1 - k^2\lambda^2(p\varepsilon)]}{1 - \lambda^2(p\varepsilon)},$$

établies aux n°s 349 et 351. Le carré k_1^2 du module k_1, étant une fonc-

tion symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47) et ayant $n+1$ valeurs, satisfait à une équation du degré $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de k^2. On pourra s'en servir comme d'une inconnue auxiliaire pour résoudre l'équation (49). Le multiplicateur g_1, qui est aussi égal à une fonction symétrique et rationnelle des quantités de la suite (47), s'exprimera rationnellement au moyen de k^2 et k_1^2. Les polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}'_1$, entiers par rapport à la fonction donnée $\lambda(z, k)$, et à l'aide desquels on obtient les fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'+2l\omega}{n}\right)$, ont pour coefficients des fonctions symétriques et rationnelles des mêmes quantités; ces coefficients s'exprimeront rationnellement au moyen de k^2 et k_1^2.

LIVRE VIII.

TRANSFORMATION.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES DE TRANSFORMATION.

390. Dans le Chapitre I du Livre VI, nous nous sommes proposé, étant donné un polynôme Y du quatrième degré en y, de trouver une fonction rationnelle y de x, telle que l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ se transforme en une autre $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X étant un polynôme du quatrième degré en x, et nous avons examiné spécialement les transformations qui donnent au nouveau polynôme X la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$. Supposons maintenant que les polynômes X et Y aient tous deux la forme canonique, et considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Si l'on y joint la condition initiale $y = y_0$ pour $x = 0$, cette équation définit une fonction y de x. On donne le module k; lorsque les deux quantités g_1 et k_1 sont prises arbitrairement, la fonction y de x est, en général, transcendante. Abel s'est proposé de rechercher dans quels cas y est une fonction algébrique de x, et de la déterminer (*Œuvres complètes*).

Désignons, pour abréger, par Δx le second radical, par $\Delta_1 y$ le premier, et posons

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y}, \quad \alpha = \int_0^{y_0} \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y},$$

d'où

$$z + \alpha = \int_0^y \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y};$$

nous aurons

$$(2) \qquad x = \lambda(z, 1, k), \quad y = \lambda(z + \alpha, g_1, k_1).$$

Soit $(2\omega, \omega')$ un couple de périodes elliptiques de la fonction x, dont le module est k et le multiplicateur égal à l'unité, $(2\omega_1, \omega'_1)$ un couple de périodes elliptiques de la fonction y, dont le module est k_1 et le multiplicateur g_1. A une valeur de x correspondent les deux séries de valeurs de z représentées par les formules $z + 2m\omega + m'\omega'$, $\omega - z + 2m\omega + m'\omega'$, où m et m' sont des nombres entiers quelconques; pour qu'à ces valeurs correspondent un nombre fini de valeurs de y, il est nécessaire que certains multiples de 2ω et de ω' soient respectivement égaux à des sommes de multiples de $2\omega_1$ et de ω'_1, et, par conséquent, que les réseaux construits sur les deux couples de périodes aient un réseau de sommets communs (n° 175). On doit donc avoir entre ces deux couples de périodes des relations de la forme

$$2\Omega = 2a\omega + b\omega' = 2a_1\omega_1 + b_1\omega'_1,$$
$$\Omega' = 2a'\omega + b'\omega' = 2a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1,$$

$a, b, \ldots$ étant des nombres entiers, et 2Ω, Ω' les périodes d'un réseau formé de tous les sommets communs. Nous avons vu (n° 177) que, réciproquement, lorsque ces conditions sont remplies, les variables x et y sont liées par une équation algébrique du degré $2N_1$ par rapport à x et du degré $2N$ par rapport à y, N et N_1 étant les déterminants $\pm(ab' - ba')$, $\pm(a_1 b'_1 - b_1 a'_1)$. Les coefficients de i dans les deux rapports $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ étant positifs, les deux déterminants ont le même signe; on peut les supposer positifs.

Nous avons démontré (n° 176) que, lorsque deux réseaux $(2\omega, \omega')$,

$(2\omega_1, \omega'_1)$ admettent un réseau de sommets communs, il existe un réseau $(2\varepsilon, \varepsilon')$ auquel appartiennent tous les sommets des deux réseaux proposés, de sorte que l'on a

$$2\omega = 2p\varepsilon + q\varepsilon', \quad 2\omega_1 = 2p_1\varepsilon + q_1\varepsilon',$$
$$\omega' = 2p'\varepsilon + q'\varepsilon', \quad \omega'_1 = 2p'_1\varepsilon + q'_1\varepsilon',$$

$p, q, \ldots$ étant des nombres entiers, et, quand la maille de ce réseau $(2\varepsilon, \varepsilon')$ est la plus grande possible, les déterminants $pq' - qp'$, $p_1q'_1 - q_1p'_1$ sont égaux respectivement à N_1 et à N. En vertu du théorème du n° 179, la relation qui existe entre les deux fonctions paires $\lambda\left(\frac{\varepsilon}{2} + z, \varepsilon, \varepsilon'\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z, \omega, \omega'\right)$ est du premier degré par rapport à la première et du degré N_1 par rapport à la seconde; il en résulte que la fonction $u = \lambda\left(\frac{\varepsilon - \omega}{2} + z, \varepsilon, \varepsilon'\right)$ est égale à une fraction rationnelle du degré N_1 par rapport à la fonction $x = \lambda(z, \omega, \omega')$. De même, la fonction $v = \lambda\left(\frac{\varepsilon - \omega_1}{2} + z + \alpha, \varepsilon, \varepsilon'\right)$ est égale à une fraction rationnelle du degré N par rapport à la fonction $y = \lambda(z + \alpha, \omega_1, \omega'_1)$. Désignons par k_2 et g_2 le module et le multiplicateur de la fonction $\lambda(z, \varepsilon, \varepsilon')$; si l'on pose $\zeta = \frac{\varepsilon - \omega}{2} + z$, $\alpha' = \frac{\omega - \omega_1}{2} + \alpha$, on a

$$u = \lambda(\zeta, \varepsilon, \varepsilon'), \quad v = \lambda(\zeta + \alpha', \varepsilon, \varepsilon'),$$

d'où

$$v = \frac{u\Delta_2 h + h\Delta_2 u}{1 - k_2^2 h^2 u^2}, \tag{3}$$

en appelant h la constante $\lambda(\alpha', \varepsilon, \varepsilon')$. Telle est la forme sous laquelle on peut mettre la relation algébrique qui existe entre x et y; le premier membre est une fonction rationnelle de y, le second membre une fonction rationnelle de x et d'un radical carré portant sur un polynôme entier en x. Le problème d'Abel revient ainsi à la recherche des fonctions rationnelles u de x et v de y, satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{du}{g_2\Delta_2 u} = \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dv}{g_2\Delta_2 v} = \frac{dy}{g_1\Delta_1 y}.$$

Dans la première équation, on donne k, et il faut déterminer g_2, k_2 et la fonction u de x; dans la seconde, g_2 et k_2 étant connus, il faut déterminer g_1, k_1 et la fonction v de y.

391. Ordinairement, on donne le nom de *transformation* à la résolution de cette question particulière : trouver une fonction rationnelle y de x qui satisfasse à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle le module k est connu, et les deux constantes g_1 et k_1 inconnues. Jacobi a donné, en même temps qu'Abel, la solution de ce problème (*Fundamenta nova*).

En désignant par α une constante, nous avons vu que x et y sont des fonctions elliptiques d'une même variable auxiliaire z,

$$(2) \qquad x = \lambda(z, 1, k), \quad y = \lambda(z+\alpha, g_1, k_1),$$

et nous avons appelé $(2\omega, \omega')$ un couple de périodes elliptiques de la première, $(2\omega_1, \omega'_1)$ un couple de périodes elliptiques de la seconde. Pour que l'équation entre x et y soit du premier degré par rapport à y, il est nécessaire, d'abord, que le nombre N soit égal à 1 et, par conséquent, que les deux réseaux $(2\omega, \omega')$, $(2\Omega, \Omega')$ coïncident; on doit donc avoir

$$(4) \qquad 2\omega = 2a\omega_1 + b\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + b'\omega'_1.$$

A une valeur de x correspondent deux valeurs z et $\omega - z$ de la variable z; il faut que les deux valeurs correspondantes de y, savoir :

$$\lambda(z+\alpha, \omega_1, \omega'_1), \quad \lambda[\omega + 2\alpha - (z+\alpha), \omega_1, \omega'_1],$$

soient égales, ce qui exige que la constante α soit de la forme

$$(5) \qquad \alpha = -(a-1)\frac{\omega_1}{2} - b\frac{\omega'_1}{4} + p\omega_1 + q\frac{\omega'_1}{2},$$

p et q étant des nombres entiers. Quand ces conditions sont remplies,

y est égal à une fonction rationnelle de x; le déterminant positif $n = ab' - ba'$ indique le degré des polynômes entiers qui composent la fraction, ou du moins le degré de celui des deux polynômes qui est du degré le plus élevé; c'est ce qu'on appelle le *degré de la transformation*.

392. Nous ferons d'abord quelques remarques qui abrégeront la discussion :

1° L'équation différentielle renferme les modules k et k_1 seulement au carré; par conséquent, si, dans une solution du problème de la transformation, on remplace k par $-k$ ou k_1 par $-k_1$, on obtient une autre solution de la même équation différentielle.

2° L'équation différentielle ne change pas quand on y remplace x par $-x$ ou y par $-y$, et en même temps g_1 par $-g_1$, le module k_1 restant le même. Elle ne change pas non plus lorsqu'on remplace x par $\frac{1}{kx}$ ou y par $\frac{1}{k_1 y}$, et g_1 par $\pm g_1$, le module k_1 restant encore le même. Si donc on opère l'une de ces substitutions dans une des solutions du problème de la transformation, on aura une autre solution de la même équation différentielle.

3° Les diverses valeurs du module cherché k_1, qui, dans les transformations du même degré, correspondent à une même valeur de k, sont réciproques deux à deux; car, si une fonction rationnelle y de x satisfait à l'équation (1), la fonction $y' = k_1 y$ du même degré satisfait à l'équation différentielle de même forme

$$\text{(6)} \qquad \frac{dy'}{g_1 k_1 \sqrt{(1-y'^2)\left(1-\frac{1}{k_1^2}y'^2\right)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle le nouveau module est $\frac{1}{k_1}$ et le nouveau multiplicateur $g_1 k_1$; c'est une autre solution du problème de la transformation.

De même, si l'on pose $x = \frac{x'}{k}$, l'équation (1) devient

$$\text{(7)} \qquad \frac{dy}{\frac{g_1}{k}\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)\left(1-\frac{1}{k^2}x'^2\right)}}.$$

D'après cela, si l'on considère les transformations relatives aux équations (1) et (7), dans lesquelles le module donné a des valeurs réciproques, les valeurs du module cherché k_1 seront les mêmes; mais il est clair que, si, dans les solutions de la première équation, on remplace simplement k par $\frac{1}{k}$, on obtient celles de la seconde; comme on revient de celle-ci à la première en remplaçant x' par kx, il en résulte que, si, dans une solution de l'équation (1), on remplace k par $\frac{1}{k}$ et x par kx, on obtient une autre solution de la même équation.

393. Nous distinguerons plusieurs cas dans le problème de la transformation, suivant que les nombres entiers a et b sont pairs ou impairs.

Premier cas : a impair, b pair. — Les valeurs de α sont de la forme $p'\omega_1 + q'\frac{\omega'_1}{2}$; elles se réduisent aux quatre valeurs 0, ω_1, $\frac{\omega'_1}{2}$, $\omega_1 + \frac{\omega'_1}{2}$; les deux premières donnent des fonctions y égales et de signes contraires, et de même les deux dernières; aux deux valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\omega'_1}{2}$ correspondent des fonctions qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution $\frac{1}{k_1 y}$, le module k_1 restant le même; on pourra donc se borner à l'hypothèse $\alpha = 0$. Quand on aura trouvé les transformations qui s'y rapportent, on en déduira les autres par les substitutions $-y$ et $\pm\frac{1}{k_1 y}$.

Deuxième cas : a pair, b impair. — Les valeurs de α sont de la forme $(2p'+1)\frac{\omega_1}{2} + (2q'+1)\frac{\omega'_1}{4}$; elles se réduisent aux quatre valeurs $\pm\frac{\omega_1}{2} \pm \frac{\omega'_1}{4}$; il suffira de chercher les transformations fournies par l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}$; les autres s'en déduiront par les substitutions $-y$, $\pm\frac{1}{k_1 y}$.

Troisième cas : a et b impairs. — Les valeurs de α sont de la forme $p'\omega_1 + (2q'+1)\frac{\omega'_1}{4}$; il suffira de considérer l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega'_1}{4}$. Mais

nous remarquons que ce troisième cas donne les mêmes transformations que le précédent; car, si l'on met les relations (4) sous la forme $2\omega = 2(a-b)\omega_1 + b(2\omega_1 + \omega'_1)$, $\omega' = 2(a'-b')\omega_1 + b'(2\omega_1 + \omega'_1)$, le nouvau coefficient $a-b$ devient pair; les fonctions de transformation $\lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $\lambda(z, \omega_1, 2\omega_1 + \omega'_1)$ sont égales et ont des modules égaux et de signes contraires.

Quatrième cas : a et b pairs. — Les valeurs de α sont de la forme $(2p'+1)\frac{\omega_1}{2} + q'\frac{\omega'_1}{2}$; elles se réduisent aux quatre valeurs $\pm\frac{\omega_1}{2}$, $\pm\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{2}$. Il suffira de considérer l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega_1}{2}$.

Transformations du premier degré.

394. Nous nous occuperons d'abord des transformations du premier degré, ce qui revient à supposer $ab' - ba' = 1$. Le quatrième cas ne se présentant pas et le troisième rentrant dans le deuxième, il suffit d'examiner les deux premiers.

Premier cas : a impair, b pair, $\alpha = 0$. — Le nombre b' est impair. Soient $a = 2a_1 + 1$, $b = 2b_1$, $b' = 2b'_1 + 1$; les relations (4) deviennent

$$\omega = (2a_1 + 1)\omega_1 + b_1\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + (2b'_1 + 1)\omega'_1.$$

Les deux fonctions $y = \lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $x = \lambda(z, \omega, \omega')$, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant.

1° $b_1 = 2b_2$. — En faisant $z = \frac{\omega}{2}$, on trouve que ce rapport est égal à ± 1; en faisant $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, on trouve $k_1 = \pm k$; on a ainsi la première transformation

$$(a) \qquad k_1 = k, \quad g_1 = 1, \quad y = x,$$

à laquelle nous joindrons celle que l'on en déduit par la substitution $-y$, savoir : $k_1 = k$, $g_1 = -1$, $y = -x$. La substitution $\frac{1}{k_1 y}$ donne la transformation corrélative

$$(a') \qquad k_1 = k, \quad g_1 = \pm 1, \quad y = \frac{1}{kx},$$

à laquelle nous joindrons de même celle qui s'en déduit par la substitution $-y$, savoir : $k_1 = k$, $g_1 = \pm 1$, $y = -\frac{1}{kx}$.

2° $b_1 = 2b_2 + 1$. — En faisant $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, on trouve que le rapport $\frac{y}{x}$ est égal à $\pm k$; en faisant ensuite $z = \frac{\omega}{2}$, on trouve $k_1 = \pm \frac{1}{k}$; on a ainsi la seconde transformation

$$(b) \qquad k_1 = \frac{1}{k}, \quad g_1 = k, \quad y = kx,$$

et la corrélative

$$(b') \qquad k_1 = \frac{1}{k}, \quad g_1 = \pm k, \quad y = \frac{1}{x},$$

et celles que l'on en déduit par la substitution $-y$.

Deuxième cas : a pair, b impair, $\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}$. — Soit $y = \frac{A + Bx}{1 + Cx}$; en faisant $z = 0$, on a $x = 0$, $y = \lambda\left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}, g_1, k_1\right) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$ (n° 365), et par suite $A = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$. Le nombre a' est impair, mais b' est pair ou impair.

1° b' pair. — Soient $a = 2a_1$, $b = 2b_1 + 1$, $a' = 2a'_1 + 1$, $b' = 2b'_1$. Si l'on remplace z par $z + \frac{\omega'}{2}$, x se change en $\frac{1}{kx}$, y en $-y$, et l'on a l'identité

$$-\frac{A + Bx}{1 + Cx} = \frac{A + \frac{B}{kx}}{1 + \frac{C}{kx}} = \frac{\frac{B}{C} + \frac{A}{C}kx}{1 + \frac{k}{C}x},$$

d'où l'on déduit $C^2 = k$, $B = -AC$, et la fonction de transformation devient

$$y = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 - Cx}{1 + Cx}.$$

Supposons d'abord que les trois nombres a_1, a'_1, b'_1 soient pairs; à

cause de la relation $ab' - ba' = 1$, le nombre b_1 sera impair. Pour $z = \frac{\omega}{2}$, on a

$$x = 1, \quad y = \lambda\left(\frac{\omega_1}{2}, g_1, k_1\right) = 1,$$

et par suite

$$\sqrt{k_1} = \frac{1 - C}{1 + C}.$$

Faisons maintenant $z = -\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega'_1}{4} + z'$, z' ayant une valeur très-petite, et développons en séries suivant les puissances de z'; en négligeant les puissances supérieures à la première, nous aurons (n° 365)

$$y = g_1 z', \quad x = \lambda\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{4} - z'\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{iz'(1-k)}{\sqrt{k}},$$

et par suite

$$g_1\sqrt{k_1}\left(1 + \frac{C}{\sqrt{k}}\right)z' = 1 - \frac{C}{\sqrt{k}} - \frac{C(1-k)}{\sqrt{k}} iz';$$

l'identification donne

$$C = \sqrt{k}, \quad g_1 = -\frac{i(1-k)}{2\sqrt{k_1}}.$$

On obtient ainsi la transformation

$$(c) \qquad k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1+\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1 - x\sqrt{k}}{1 + x\sqrt{k}}.$$

Les autres combinaisons de nombres entiers se ramènent à la précédente, à l'aide des transformations du premier cas. Considérons les fonctions $y_1 = \lambda_1\left(z + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}\right)$, $y_2 = \lambda_2\left(z + \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega'_2}{4}\right)$, qui correspondent aux deux couples de périodes définies par les formules

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= 2b'\omega - b\omega', & 2\omega_2 &= 2b'_1\omega - b_1\omega', \\ \omega'_1 &= -2a'\omega + a\omega', & \omega'_2 &= -2a'_1\omega + a_1\omega', \end{aligned}$$

dans lesquelles les nombres homologues a et a_1, b et b_1, a' et a'_1,

b' et b'_1 sont en même temps pairs ou impairs. La quantité

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}+\frac{\omega'_2-\omega'_1}{4}=\left(\frac{a'-a'_1}{2}-\frac{b'-b'_1}{2}\right)\omega-\left(\frac{a-a_1}{2}-\frac{b-b_1}{2}\right)\frac{\omega'}{2}$$

est de la forme $p\omega+q\frac{\omega'}{2}$, et par suite de la forme $p_1\omega_2+q_1\frac{\omega'_2}{2}$, p, q, p_1, q_1 étant des nombres entiers. Si l'on pose $z=-\frac{\omega_1}{2}-\frac{\omega'_1}{4}+z'$, on aura donc

$$y_1=\lambda_1(z'),\quad y_2=\lambda_2\left(z'+p_1\omega_2+q_1\frac{\omega'_2}{2}\right).$$

L'expression de y_2 en fonction de y_1 rentre ainsi dans le premier cas de la transformation.

En faisant subir à la fonction (c) la transformation (b), on obtient la nouvelle fonction

$$(d)\qquad k_1=\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1-x\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}},$$

dont le module est réciproque du précédent. Par la substitution $\frac{1}{k_1y}$, on en déduit les transformations corrélatives

$$(c')\qquad k_1=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1+\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}},$$

$$(d')\qquad k_1=\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}.$$

On a, en outre, les quatre fonctions qui se déduisent des précédentes par la substitution $-y$.

2° b' impair. — Ce cas se ramène au précédent. Si, dans une solution du problème de la transformation, on remplace k par $-k$, il est clair que l'on obtient une autre solution de la même équation différentielle. Ceci revient à remplacer $\lambda(z,\omega,\omega')$ par la fonction égale $\lambda(z,\omega,2\omega+\omega')$, qui a un module égal à celui de la première et de signe contraire; mais, si les nombres b et b' sont impairs, dans les relations (4) mises sous la forme

$$2\omega=2a\omega_1+b\omega'_1,\quad 2\omega+\omega'=2(a+a')\omega_1+(b+b')\omega'_1,$$

le nouveau coefficient $b + b'$ est pair. Ainsi les solutions qui se rapportent au cas actuel se déduisent des précédentes par le changement de k en $-k$; on obtient de la sorte les deux nouvelles transformations

$$(e)\quad k_1 = \left(\frac{1 - i\sqrt{k}}{1 + i\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1 + i\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\,\frac{1 - ix\sqrt{k}}{1 + ix\sqrt{k}},$$

$$(f)\quad k_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1 - i\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1 - i\sqrt{k}}{1 + i\sqrt{k}}\,\frac{1 - ix\sqrt{k}}{1 + ix\sqrt{k}},$$

qui se rapportent à deux modules réciproques, et les deux corrélatives

$$(e')\quad k_1 = \left(\frac{1 - i\sqrt{k}}{1 + i\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1 + i\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\,\frac{1 + ix\sqrt{k}}{1 - ix\sqrt{k}},$$

$$(f')\quad k_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{k}}{1 - i\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1 - i\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1 - i\sqrt{k}}{1 + i\sqrt{k}}\,\frac{1 + ix\sqrt{k}}{1 - ix\sqrt{k}},$$

et, en outre, celles qui s'en déduisent par la substitution $-y$.

Transformations d'un degré impair.

395. Nous avons vu déjà (n° 393) que le troisième cas rentre dans le second. Une transformation du premier degré ramène le second cas au premier. Si l'on considère, en effet, la fonction $u = \lambda(z, \omega_2, \omega'_2)$, relative au couple des périodes $2\omega_2 = \omega'_1$, $\omega'_2 = -2\omega_1$ équivalent au couple $2\omega_1, \omega'_1$, on remarque que la fonction $y = \lambda(z + \alpha, \omega_1, \omega'_1)$ est égale à une fonction rationnelle de u du premier degré; en appelant k_2 et g_2 le module et le multiplicateur de la fonction u, on a, d'après la formule (c) du numéro précédent,

$$k_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{k_2}}{1 + \sqrt{k_2}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}g_2(1 + \sqrt{k_2})^2, \quad y = \frac{1 + \sqrt{k_2}}{1 - \sqrt{k_2}}\,\frac{1 - u\sqrt{k_2}}{1 + u\sqrt{k_2}}.$$

Mais les relations (4) deviennent

$$2\omega = 2b\omega_2 - a\omega'_2, \quad \omega' = 2b'\omega_2 - a'\omega'_2;$$

le premier coefficient étant actuellement impair, le second pair, l'expression de u par une fraction rationnelle en x rentre dans le premier cas de la transformation.

Ce premier cas se subdivise en deux, suivant que b est de la forme $4b_1$ ou $4b_1+2$. On ramène le second cas au premier par une autre transformation du premier degré. Considérons, en effet, la fonction $u=\lambda(z, \omega_2, \omega'_2)$, relative au couple des périodes $2\omega_2=2\omega_1+2\omega'_1$, $\omega'_2=\omega'_1$ équivalent au couple $2\omega_1$, ω'_1, et désignons par k_2 et g_2 son module et son multiplicateur; on a, d'après la formule (b),

$$k_1=\frac{1}{k_2}, \quad g_1=k_2 g_2, \quad y=k_2 u.$$

Les relations (4) deviennent

$$2\omega=2a\omega_2+(b-2a)\omega'_2, \quad \omega'=2a'\omega_2+(b'-2a')\omega'_2;$$

le second coefficient est maintenant de la forme $4b_1$. Ainsi les transformations fournies par les valeurs de b de la forme $4b_1+2$ présentent des modules réciproques de ceux qui se rapportent aux transformations fournies par les valeurs de b de la forme $4b_1$.

396. Étudions d'abord les transformations d'un degré impair n. Le quatrième cas ne se présentant pas, il suffit, d'après ce que nous venons de dire, de supposer $a=2a_1+1$, $b=4b_1$, $\alpha=0$, ce qui réduit les relations (4) à

$$\omega=(2a_1+1)\omega_1+2b_1\omega'_1, \quad \omega'=2a'\omega_1+b'\omega'_1; \tag{8}$$

les quatre nombres entiers qu'elles renferment ne sont assujettis qu'à la condition

$$(2a_1+1)b'-4b_1a'=n. \tag{9}$$

Considérons tous les systèmes de nombres entiers dans lesquels les deux nombres $2a_1+1$ et b_1 admettent un même plus grand commun diviseur n', qui sera nécessairement un diviseur de n; posons $n=n'n''$, $2a_1+1=n'(2a_2+1)$, $b_1=n'b_2$; la première des relations (8) devient

$$\frac{\omega}{n'}=(2a_2+1)\omega_1+2b_2\omega'_1,$$

et la condition (9) se réduit à

$$(10) \qquad (2a_2+1)b' - 4b_2a' = n''.$$

Les nombres $2a_2+1$ et $4b_2$ étant premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres a'' et $2b''+1$ satisfaisant à la relation

$$(11) \qquad (2a_2+1)(2b''+1) - 4b_2a'' = 1.$$

Si l'on pose

$$\omega'' = 2a''\omega_1 + (2b''+1)\omega'_1,$$

on voit que le couple des périodes (ω_1, ω'_1) est équivalent au couple $\left(\frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$, que les fonctions $\lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$, qui ont mêmes zéros et mêmes infinis, sont égales, ou égales et de signes contraires, et que leurs modules sont égaux, ou égaux et de signes contraires. Des relations (10) et (11) on déduit

$$(12) \qquad a' = n''a'' - (2a_2+1)t, \quad b' = n''(2b''+1) - 4b_2t,$$

t étant un nombre entier. En remplaçant a'' et $2b''+1$ par leurs valeurs tirées de ces dernières relations, on trouve

$$\omega'' = \frac{\omega'}{n''} + 2t\frac{\omega}{n} = \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''},$$

et l'on arrive à la formule

$$(13) \qquad y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right),$$

pareille à celle du n° 361. Mais, ici, la lettre t désigne un nombre entier quelconque; car, quel que soit t, en prenant arbitrairement les deux nombres $2a_2+1$ et b_2 premiers entre eux, on déterminera les deux nombres $2b''+1$ et a'' par l'équation (11), puis les deux nombres a' et b' par les équations (12); l'équation (10) en résulte, et par suite l'équation (9). Ainsi, lorsque n est impair, les fonctions représentées

par la formule (13), et celles qu'on en déduit par des transformations du premier degré, donnent toutes les transformations rationnelles du degré n.

397. Nous avons vu, au n° 363, que les fonctions données par la formule (13) pour n'' valeurs consécutives de t sont, non-seulement différentes, mais encore que deux d'entre elles ne peuvent être dans un rapport constant; nous avons vu aussi qu'il en est de même pour celles qui sont fournies par deux modes de division différents du nombre n. On en conclut que le nombre des transformations du degré n, du genre de celles que nous cherchons maintenant, est égal à la somme des diviseurs de n.

Nous les partagerons en deux classes : celles qui sont données par les valeurs de t qui n'ont pas de diviseur commun avec n' et n'', et celles qui correspondent aux combinaisons dans lesquelles les trois nombres n', n'', t admettent un plus grand commun diviseur. D'après ce que nous avons dit au n° 362, les premières sont égales à $\pm\lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right)$ ou à $\pm\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$; elles proviennent de la division par n de l'une des périodes des couples $(2\omega_1, \omega'_1)$ définis par les formules (41) du n° 360. Considérons maintenant les combinaisons dans lesquelles le plus grand commun diviseur des trois nombres n', n'', t est égal à h, et soient $n' = hn'_1$, $n'' = hn''_1$, $n = h^2 n_1$, $t = ht_1$; on obtiendra les fonctions correspondantes

$$y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{hn'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\frac{\omega}{n'_1}}{hn''_1}\right) = \lambda\left(hz, \frac{\omega}{n'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\frac{\omega}{n'_1}}{n''_1}\right),$$

en divisant par n_1 l'une des périodes des couples $(2\omega_1, \omega'_1)$ et multipliant ensuite l'argument par h. Cette deuxième classe ne se présente pas lorsque les exposants des facteurs premiers du nombre n sont tous égaux à l'unité.

Lorsque le module donné k est fini et différent de zéro, les deux périodes particulières 2ω, ω', déterminées par des intégrales définies (n° 221), ont des valeurs finies différentes de zéro, et leur rapport est imaginaire; il en est de même des deux périodes de chacune des

fonctions représentées par la formule (13), et, par conséquent, ces fonctions ont toutes des modules et des multiplicateurs finis et différents de zéro.

398. Nous ferons encore remarquer que les carrés des modules de deux des fonctions représentées par la formule (13) ne peuvent être égaux ou réciproques, quel que soit le module donné k. Cherchons d'abord la condition pour que deux fonctions elliptiques

$$\lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda(z, \omega_1, \omega'_1) = \lambda(g_1 z, k_1)$$

aient leurs modules égaux, ou égaux et de signes contraires. Si l'on avait $k_1 = \pm k$, les deux fonctions

$$(14) \qquad \lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right) = \lambda(gz, k_1),$$

seraient égales, et leurs périodes satisferaient à des relations de la forme

$$(15) \qquad \frac{g_1}{g}\omega_1 = (4a+1)\omega + 2b\omega', \quad \frac{g_1}{g}\omega'_1 = 2a'\omega + (4b'+1)\omega',$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1) - 4ba' = 1$. En désignant par ρ et ρ_1 les rapports $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$, on aurait

$$(16) \qquad \rho_1 = \frac{2a' + (4b'+1)\rho}{(4a+1) + 2b\rho}.$$

Cette condition est suffisante; car, lorsqu'elle est remplie, on peut déterminer la quantité $\frac{g_1}{g}$, de manière que les équations (15) soient vérifiées; les deux fonctions (14) sont égales, et l'on a $k_1 = \pm k$.

Si l'on avait $k_1 = \pm \frac{1}{k}$, puisque la fonction $\lambda(z, \omega_1 - \omega'_1, \omega'_1)$ est égale à $\lambda\left(g_1 k_1 z, \frac{1}{k_1}\right)$, la fonction

$$\lambda\left[z, \frac{g_1 k_1}{g}(\omega_1 - \omega'_1), \frac{g_1 k_1}{g}\omega'_1\right] = \lambda\left(gz, \frac{1}{k_1}\right)$$

serait égale à la première des fonctions (14), et l'on arriverait à la condition

$$(17) \qquad \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{2a' + (4b'+1)\rho}{(4a+1)+2b\rho}.$$

Considérons maintenant deux des fonctions (13), savoir

$$\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\dfrac{\omega}{n'}}{n''}\right), \quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\dfrac{\omega}{n'_1}}{n''_1}\right).$$

Pour que leurs modules fussent égaux, ou égaux et de signes contraires, quel que soit le module donné k, il faudrait que la condition

$$\frac{2t_1 + n'_1\rho}{n''_1} = \frac{2[a'n'' + (4b'+1)t] + (4b'+1)n'\rho}{[(4a+1)n'' + 4bt] + 2bn'\rho}$$

fût vérifiée, quel que soit ρ, ce qui ne peut avoir lieu que si $b = 0$, et, par suite, $a = b' = 0$, $n'_1 = n'$, $n''_1 = n''$, $t_1 = t + a'n''$; et alors les deux fonctions seraient égales. Pour que les carrés des modules fussent réciproques, il faudrait que la condition

$$\frac{2t_1 + n'_1\rho}{(n''_1 - 2t_1) - n'_1\rho} = \frac{2[a'n'' + (4b'+1)t] + (4b'+1)n'\rho}{[4a+1)n'' + 4bt] + 2bn'\rho}$$

fût vérifiée, quel que soit ρ, ce qui est impossible, puisqu'on ne peut avoir $4b' + 1 = -2b$.

399. Il est facile de vérifier que les fonctions dont nous venons de parler satisfont bien aux conditions qui servent de base à la méthode de Jacobi (n° 260). Considérons, par exemple, la fonction (n° 349)

$$y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = g_1\frac{x\varphi_1}{\varphi};$$

on a ici

$$Y = g_1^2(1-y)(1+y)(1-k_1y)(1+k_1y),$$

et, après la substitution,

$$\sqrt{Y} = \frac{g_1}{\varphi^2}\sqrt{(\varphi - g_1x\varphi_1)(\varphi + g_1x\varphi_1)(\varphi - g_1k_1x\varphi_1)(\varphi + g_1k_1x\varphi_1)}.$$

D'après les identités (20) ou (20)' du n° 380, chacun des quatre binômes placés sous le radical est égal au produit d'un facteur du premier degré en x par un polynôme carré parfait; on a donc

$$\sqrt{Y} = \frac{g_1 M}{\varphi^2} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

M étant un polynôme entier en x du degré $2n-2$.

Il en est de même des transformations relatives à la multiplication de l'argument. Soit $y = \lambda(nz) = \frac{xP_1}{P}$ (n° 332); on a

$$Y = n^2(1-y)(1+y)(1-ky)(1+ky),$$

après la substitution

$$\sqrt{Y} = \frac{n}{P^2} \sqrt{(P - xP_1)(P + xP_1)(P - kxP_1)(P + kxP_1)},$$

et, en vertu des identités (3) ou (3)' du n° 372,

$$\sqrt{Y} = \frac{nM}{P^2} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

M étant un polynôme entier en x du degré $2n^2-2$.

Transformations d'un degré pair.

400. Étudions maintenant les transformations d'un degré pair. Soit $n = 2^h n_1$, n_1 étant impair. Les trois premiers cas de la transformation se ramènent, comme nous l'avons dit au n° 395, à celui où $a = 2a_1 + 1$, $b = 4b_1$, $\alpha = 0$. Considérons les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (9), et dans lesquels les deux nombres entiers $2a_1 + 1$ et b_1 admettent un même plus grand commun diviseur n', qui sera nécessairement impair et diviseur de n_1; en posant $n_1 = n'n''$ et raisonnant comme précédemment, on arrivera à la formule

$$(18) \qquad y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{2^h n''}\right),$$

dans laquelle t désigne un nombre entier quelconque. A chaque diviseur n'' de n_1 correspondent ainsi $2^h n''$ fonctions y, et, par conséquent, le nombre des transformations rationnelles de cette sorte est égal à la somme des diviseurs de n_1 multipliée par 2^h.

Il nous reste à examiner le quatrième cas de la transformation, celui où les deux nombres a et b sont pairs et $\alpha = \frac{\omega_1}{2}$. Considérons les systèmes de nombres entiers vérifiant la relation $ab' - ba' = n$, et dans lesquels les deux nombres a et b admettent un même plus grand commun diviseur $2^r n'$; l'exposant r sera égal ou inférieur à h, et le nombre impair n' un diviseur de n_1. Posons $a = 2^r a_1$, $b = 2^r b_1$, l'un des nombres a_1 et b_1 au moins étant impair. Nous commencerons par diviser la première période r fois successivement par 2. La première des formules (19) du n° 77 donne

$$\lambda\left(z + \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{\mu\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\nu\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)};$$

d'après les formules du n° 366, on en déduit

$$x_1 = \lambda\left(z + \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{1 - (1 + k')x^2}{1 - (1 - k')x^2}, \quad k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad g_1 = 1 + k',$$

k_1 et g_1 étant le module et le multiplicateur de la fonction x_1. Si l'on pose $z_1 = z + \frac{\omega}{4}$, on aura de même

$$x_2 = \lambda\left(z_1 + \frac{\omega}{2^3}, \frac{\omega}{2^2}, \omega'\right) = \frac{1 - (1 + k'_1)x_1^2}{1 - (1 - k'_1)x_1^2}, \quad k_2 = \frac{1 - k'_1}{1 + k'_1}, \quad g_2 = g_1(1 + k'_1),$$

k_2 et g_2 étant le module et le multiplicateur de la fonction x_2. On posera ensuite $z_2 = z_1 + \frac{\omega}{2^3}$, $z_3 = z_2 + \frac{\omega}{2^4}, \ldots$, et l'on continuera de cette manière jusqu'à la fonction

$$x_r = \lambda\left(z_{r-1} + \frac{\omega}{2^{r+1}}, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right) = \lambda\left(\zeta, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right).$$

Mais on a

$$\zeta = z + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{2^3} + \ldots + \frac{\omega}{2^{r+1}} = z + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2^{r+1}},$$

et, si l'on pose

$$\alpha' = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2^{r+1}} = (a_1+1)\frac{\omega_1}{2} + b_1\frac{\omega'_1}{4} - 2^{r-1}\left(a_1\omega_1 + b_1\frac{\omega'_1}{2}\right),$$

on aura à chercher la relation entre les deux fonctions

$$y = \lambda(\zeta + \alpha', \omega_1, \omega'_1), \quad x_r = \lambda\left(\zeta, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right).$$

Les relations (4) deviennent

$$2\frac{\omega}{2^r} = 2a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + b'\omega'_1,$$

avec la condition $a_1 b' - b_1 a' = 2^{h-r} n_1$. La nouvelle constante α' a la forme voulue pour que y soit égal à une fraction rationnelle en x_r; l'un des nombres a_1 et b_1 étant impair, on est ramené à l'un des trois premiers cas de la transformation. On obtient ainsi les fonctions représentées par la formule

$$y = \lambda\left(z + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2^{r+1}}, \frac{\omega}{2^r n'}, \frac{\omega' + 2t\dfrac{\omega}{2^r n'}}{2^{h-r} n''}\right), \tag{19}$$

et celles que l'on en déduit par des transformations du premier degré.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MODULAIRE.

Existence de l'équation modulaire.

401. Nous nous occuperons spécialement du cas où n est impair et premier. Dans ce cas, la formule (13) du n° 396 donne $n+1$ fonctions de transformation, savoir : $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ et les n fonctions représentées par la formule $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$, dans laquelle t reçoit n valeurs entières consécutives; mais nous mettrons ces dernières sous la forme $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 16t\omega}{n}\right)$. Si l'on désigne par ε l'une des $n+1$ quantités $\frac{2\omega}{n}, \frac{\omega' + 16t\omega}{n}$, les modules de ces $n+1$ fonctions sont donnés par la formule

$$\sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2(p\varepsilon)}{\nu^2(p\varepsilon)}.$$

Nous poserons $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k_1} = v^2$, et nous définirons les $n+1$ valeurs de v par la formule

$$(1) \qquad v = u^n \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\theta_2(p\varepsilon)}{\theta_3(p\varepsilon)},$$

d'où l'on déduit

$$(2) \qquad \xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)}.$$

Si dans l'expression de $\frac{\mu(nz)}{\nu(nz)}$, déduite des formules (14) du n° **332**, relatives à la multiplication de l'argument, on remplace z par $p\varepsilon$, et si l'on remarque que cette quantité devient égale à 1, on obtient l'expression de $\frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)}$ par une fraction rationnelle en k^2 et $\lambda^2(p\varepsilon)$; chaque valeur de ξ est donc une fonction symétrique et rationnelle des $\frac{n-1}{2}$ quantités

$$\lambda^2(\varepsilon),\quad \lambda^2(2\varepsilon),\quad \lambda^2(3\varepsilon),\ldots,\quad \lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\varepsilon\right).$$

Grâce à la substitution de $\frac{2\omega}{n}$ à $\frac{\omega}{n}$ dans l'expression du premier module, cette fonction ne change pas quand on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier premier avec n. On en conclut, d'après le raisonnement du n° **387**, que les $n+1$ valeurs de ξ sont les racines d'une équation algébrique du degré $n+1$ en ξ, ayant pour coefficients des fractions rationnelles de k^2 ou de u^8. En remplaçant ξ par $\frac{v}{u^n}$, on obtient une équation algébrique entre u et v, du degré $n+1$ par rapport à v; on lui donne le nom d'*équation modulaire*. Quand on remplace u par $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, les valeurs de ξ ne changent pas et, par conséquent, celles de v sont multipliées par le facteur constant $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$. Nous remarquons encore que l'équation ne change pas quand on y remplace u et v par $-u$ et $-v$.

Expression des racines de l'équation modulaire.

402. Nous avons démontré au n° **365** que les quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, données par les formules (29) et (30) du n° **205**, sont des fonctions holomorphes de la variable $\rho = r+si$, pour toutes les valeurs de cette variable dans lesquelles le coefficient s est positif et différent de zéro, c'est-à-dire pour la moitié du plan située au-dessus de l'axe des x. Nous poserons

$$(3)\qquad \varphi(\rho) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\rho i}{8}} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}} = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}}{1+e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}},$$

$$(4)\qquad \psi(\rho) = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}} = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{8\rho}} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1+e^{-\frac{2m\pi i}{\rho}}}{1+e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}}.$$

Les deux formes sous lesquelles nous avons écrit chacune de ces fonctions s'accordent; car les deux premières quantités, par exemple, dont les huitièmes puissances sont égales à k^2, ayant des valeurs réelles et positives pour les valeurs $\rho = si$, sont nécessairement égales pour ces valeurs de ρ, c'est-à-dire quand cette variable décrit l'axe des y; elles sont donc égales dans tout le demi-plan (n°s 114 et 366). A l'inspection des formules précédentes, on reconnait que les deux fonctions qu'elles définissent, et qui ont été étudiées par M. Hermite (*Comptes rendus*, 1858), jouissent des propriétés suivantes :

$$\varphi(\rho) = \psi\left(-\frac{1}{\rho}\right), \quad \psi(\rho) = \varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\psi(\rho+1) = \frac{1}{\psi(\rho)}, \quad \psi(\rho+2) = \psi(\rho),$$

$$\varphi(\rho+1) = e^{\frac{\pi i}{8}}\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}, \quad \varphi(\rho+2) = e^{\frac{2\pi i}{8}}\varphi(\rho), \quad \varphi(\rho+2h) = e^{\frac{2h\pi i}{8}}\varphi(\rho).$$

Elles sont réelles et positives pour les valeurs $\rho = si$.

403. Dans ce qui suit, nous prendrons $u = \varphi(\rho)$, et, pour distinguer les $n+1$ valeurs de v, nous désignerons par V celle qui se rapporte à la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ et par v_t celle qui se rapporte à la fonction $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'+16t\omega}{n}\right)$. Nous allons démontrer que ces quantités, telles qu'elles sont définies par la formule (1), ont pour expressions

$$\text{(5)} \qquad V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi(n\rho), \quad v_t = \varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right).$$

D'après la remarque faite au commencement du n° 365, les quantités $\frac{\theta_2(p\varepsilon)}{\theta_3(p\varepsilon)}$, et, par conséquent, les valeurs de v sont des fonctions holomorphes de ρ. Considérons d'abord V et donnons à ρ la valeur si; dans les développements de $\theta_2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)$ et de $\theta_3\left(\frac{2p\omega}{n}\right)$ en produits d'après les formules (20) du n° 202, les facteurs placés sous le signe produit étant tous réels et positifs, le quotient de ces deux quantités est réel et a le signe de $\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$; la valeur de V est donc réelle et a le signe du pro-

duit des $\frac{n-1}{2}$ facteurs $\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$, quand p varie de 1 à $\frac{n-1}{2}$. Lorsque $\frac{n-1}{2}$ est pair et égal à $2n'$, les n' premiers facteurs étant positifs, les n' suivants négatifs, leur produit a le signe de $(-1)^{n'}$. Lorsque $\frac{n-1}{2}$ est impair et égal à $2n'-1$, les $n'-1$ premiers facteurs étant positifs, les n' suivants négatifs, leur produit a le signe de $(-1)^{n'}$. Ainsi V a le signe de $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, et, comme $\varphi(n\rho)$ a une valeur réelle et positive, il y a accord entre les deux formules. Pour abréger, nous désignons par α le nombre entier $\frac{n^2-1}{8}$.

On obtient v_t en attribuant à ε, dans la formule (1), la valeur

$$\varepsilon = \frac{\omega' + 16t\omega}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho + 16t}{n}.$$

Si l'on pose $\rho + 16t = \rho'$, on déduit des formules (6) du n° 74

$$\theta_3(p\varepsilon) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\pi\rho' i\left(\frac{2mp}{n} + m^2\right)}, \quad \theta_2(p\varepsilon) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\pi\rho' i\left[\frac{(2m+1)p}{n} + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right]};$$

on a d'ailleurs $u = \varphi(\rho' - 16t) = \varphi(\rho')$; pour $\rho' = s'i$, ces quantités et, par suite, v_t ont des valeurs réelles et positives. Il en est de même de la quantité $\varphi\left(\frac{\rho'}{n}\right)$ donnée par la seconde des formules (5). Ainsi il y a accord entre les formules.

Supposons que dans l'équation modulaire on remplace u par $(-1)^\alpha V$; pour avoir les racines de la nouvelle équation, il suffira de remplacer ρ par $n\rho$ dans les formules (5); la racine v_0 est égale à $\varphi(\rho)$, c'est-à-dire à u. De même, supposons que l'on remplace u par v_t, ce qui revient à remplacer ρ par $\frac{\rho+16t}{n}$; la racine V de la nouvelle équation sera égale à $(-1)^\alpha\varphi(\rho+16t)$, c'est-à-dire à $(-1)^\alpha u$. Il en résulte qu'à toute solution (u, v) de l'équation modulaire correspond une autre solution $[v, (-1)^\alpha u]$ de la même équation.

404. De la troisième des formules (63) du n° 367, relatives à la divi-

sion par 2 de la seconde période, on déduit

$$\sqrt[4]{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+k}\sqrt{k_1};$$

mais, d'après les formules (55) du n° 365, on a

$$\nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right) = \sqrt{1+k}, \quad \lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k_1}};$$

il en résulte l'expression

$$(6) \qquad \varphi(\rho) = \sqrt[4]{k} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)},$$

qui nous permettra de trouver toutes les valeurs de ρ pour lesquelles la fonction $\varphi(\rho)$ a une valeur donnée.

Nous avons vu, au n° 398, que, pour que les carrés des modules de deux fonctions elliptiques

$$\lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda(z, \omega_1, \omega'_1) = \lambda(g_1 z, k_1)$$

soient égaux, il est nécessaire et il suffit que les rapports $\rho = \frac{\omega'}{\omega}$, $\rho_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$ satisfassent à la relation (16); on a alors $\varphi^8(\rho_1) = \varphi^8(\rho)$. Cherchons maintenant la condition pour que les deux fonctions $\varphi(\rho)$, $\varphi(\rho_1)$ soient égales, ou égales et de signes contraires.

Comme on a $k_1 = (-1)^{a'} k$, il faut d'abord que a' soit pair; posons $a' = 2a'_1$; comme on a $\sqrt{k_1} = (-1)^{a'_1}\sqrt{k}$, d'après la première des formules (55) du n° 365, il faut que le nombre a'_1 soit lui-même pair; posons $a'_1 = 2a'_2$. Comme nous l'avons dit au n° 398, il résulte des formules (15) que les fonctions $\lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right)$, $\lambda(z, \omega, \omega')$ sont égales, et, par suite, les fonctions $\nu\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right)$, $\nu(z, \omega, \omega')$; lorsque a' est pair, il en résulte aussi que les fonctions $\lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\frac{\omega'_1}{2}\right)$,

$\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)$ sont égales. On a donc

$$\nu\left(\frac{\omega'_1}{4}, \omega_1, \omega'_1\right) = (-1)^{b'} \nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right), \quad \lambda\left(\frac{\omega'_1}{8}, \omega_1, \frac{\omega'_1}{2}\right) = (-1)^{a'_2} \lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right),$$

et, par suite, en vertu de la formule (6),

$$\varphi(\rho_1) = (-1)^{a'_2+b'} \varphi(\rho) = (-1)^{a+a'_2} \varphi(\rho).$$

Ainsi, pour que $\varphi(\rho_1) = \pm\, \varphi(\rho)$, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

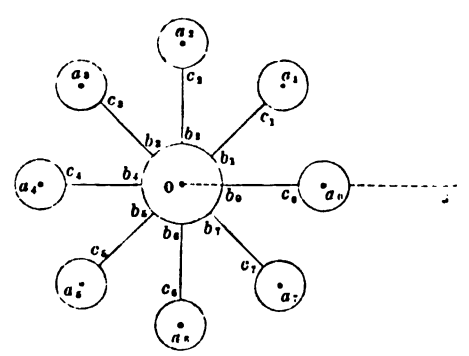
$$(7) \qquad \rho_1 = \frac{8a'_2 + (4b'+1)\rho}{(4a+1) + 2b\rho},$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1) - 16ba'_2 = 1$.

Points critiques.

405. Les périodes ω et ω', déterminées par des intégrales définies, comme nous l'avons expliqué aux nos **221** et **231**, sont des fonctions continues de k^2; il n'y a exception que pour $k^2 = 0$ et $k^2 = 1$; ces deux quantités, et par suite leur rapport ρ, sont donc des fonctions holomorphes de la variable k^2, dans toute portion du plan, à contour simple, ne comprenant aucun de ces deux points critiques. Par rapport à la va-

Fig. 81.



riable u, il y a neuf points critiques, savoir l'origine $u = 0$ et les huit points $u = e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, placés aux sommets d'un octogone régulier $a_0 a_1 \ldots a_7$ (*fig.* 81). Chacune des valeurs de ν est une fonction holomorphe de ρ,

et par conséquent de u, lorsque cette variable u se meut dans une portion du plan, à contour simple, ne comprenant aucun des points critiques dont nous venons de parler, et qui sont les seuls qui existent dans le plan par rapport aux racines de l'équation modulaire.

Pour former les lacets, nous ferons partir la variable u d'un point b_0 situé sur l'axe Ox, à une distance du point O plus petite que l'unité. Le lacet (a_0) est formé d'une droite $b_0 c_0$ et d'un petit cercle; le lacet (a_1) d'un arc $b_0 b_1$ égal à $\frac{1}{8}$ de circonférence, d'une droite $b_1 c_1$ et d'un petit cercle; le lacet (a_2) d'un arc $b_0 b_1 b_2$ égal à $\frac{2}{8}$ de circonférence, d'une droite $b_2 c_2$ et d'un petit cercle,...; le lacet (a_7) d'un arc $b_0 b_1 \ldots b_7$ égal aux $\frac{7}{8}$ de la circonférence, d'une droite $b_7 c_7$ et d'un petit cercle; enfin le lacet (O) du cercle $b_0 b_1 \ldots b_7 b_0$. Au point b_0, la période ω étant réelle et positive, et la période ω' de la forme $\omega'' i$, on a $\rho = \rho_0 = si$, s étant une quantité réelle et positive; nous distinguerons les $n + 1$ racines par leurs valeurs initiales

$$V = (-1)^\alpha \varphi(n\rho_0), \quad v_0 = \varphi\left(\frac{\rho_0}{n}\right), \quad v_1 = \varphi\left(\frac{\rho_0 + 16}{n}\right), \ldots, \quad v_{n-1} = \varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(n-1)}{n}\right);$$

la première est réelle et a le signe de $(-1)^\alpha$, la seconde est réelle et positive.

Pour les valeurs de u situées à l'intérieur du cercle décrit de l'origine avec un rayon égal à l'unité, en développant $(1 - k^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en série, et faisant $g = 1$, on déduit de la formule (3) du n° 221

$$\omega = \pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots\right].$$

D'autre part, l'équation (35) du n° 279 donne

$$(8) \qquad \frac{d\rho}{dk} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k} + Ak + Bk^3 + \ldots\right);$$

on en déduit par l'intégration

$$(9) \qquad \rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\left[8 \log \frac{u}{u_0} + A(k^2 - k_0^2) + \frac{B}{2}(k^4 - k_0^4) + \ldots\right],$$

en supposant que $\log \frac{u}{u_0}$ soit égal à zéro pour $u = u_0$, c'est-à-dire au point b_0. Lorsque u tend vers zéro, le coefficient positif s, dans l'expression $\rho = r + si$, augmente à l'infini; si l'on prend la fonction $\varphi(\rho)$ sous sa première forme, on reconnaît que les $n+1$ valeurs de v tendent vers zéro. Quand la variable u décrit le cercle O dans le sens positif, la valeur de ρ devient $\rho_0 + 16$; la racine V reste holomorphe dans le voisinage du point O et se développe en une série convergente

$$(10) \qquad V = (-1)^n 2^{\frac{n-1}{2}} u^n + \ldots,$$

suivant les puissances entières de u. La racine $v_t = \varphi\left(\frac{\rho_0 + 16t}{n}\right)$ devient $\varphi\left[\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right]$, et, par conséquent, se change en v_{t+1}; ainsi les n autres racines forment autour du point O un système circulaire $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ se permutant dans l'ordre des indices; ces racines sont représentées, dans le même ordre, par la série

$$(11) \qquad v = 2^{\frac{n-1}{2n}} u^{\frac{1}{n}} + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de $u^{\frac{1}{n}}$.

406. Considérons maintenant le point critique $u = 1$. La fonction elliptique, au module complémentaire, admet les périodes $\omega_1 = -\omega' i$, $\omega'_1 = \omega i$ (n° 236), dont le rapport ρ' est égal à $-\frac{1}{\rho}$. Quand le point u décrit la droite $b_0 a_0$, la première période ω_1 reste réelle et positive, le rapport ρ, donné par l'équation (10), conserve la forme si, et de même le rapport ρ'. La période ω_1 est représentée par une intégrale définie analogue à celle qui donne ω (n° 221); faisant encore $g = 1$, il suffit de remplacer dans celle-ci k par k'; elle peut être développée en une série pareille à la série (8) et convergente pour les valeurs de k'^2 dont le module est plus petit que 1; on en déduit, comme précédemment,

$$(12) \qquad \left(\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i}\frac{1}{k'} + A k' + B k'^3 + \ldots\right),$$

les coefficients A, B,... étant les mêmes que dans l'équation (9), et par suite

$$(13) \qquad \rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i}\left[\log\frac{k'^2}{k'^2_0} + A(k'^2 - k'^2_0) + \frac{B}{2}(k'^4 - k'^4_0) + \ldots\right].$$

Lorsque u tend vers 1, le coefficient s', dans l'expression $\rho' = r' + s'i$, augmente à l'infini; si l'on prend la fonction $\varphi(\rho)$ sous sa seconde forme, on reconnaît que la racine v_0 tend vers 1, et la racine V vers $(-1)^\alpha$. Quand la variable u décrit autour du point a_0, et dans le sens positif, un cercle ne comprenant aucun autre point critique, l'argument de k'^2 augmente de 2π, ρ' devient $\rho'_0 + 2$, et ρ égal à $\frac{\rho_0}{1-2\rho_0}$. La racine $v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi(n\rho')$, réelle et positive sur la droite $b_0 a_0$, reste holomorphe dans le voisinage du point a_0; on obtient son développement en posant $u = 1 - u'$, $v_0 = 1 - v'_0$; d'où

$$\psi^8(\rho) = 1-(1-u')^8 = 8u' + \ldots, \quad u' = \frac{1}{8}\psi^8(\rho) + \ldots,$$

$$\psi^8\left(\frac{\rho}{n}\right) = 1-(1-v'_0)^8 = 8v'_0 + \ldots, \quad v'_0 = \frac{1}{8}\psi^8\left(\frac{\rho}{n}\right) + \ldots,$$

et, en se servant de la seconde forme de la fonction $\psi(\rho)$,

$$(14) \qquad v'_0 = 2^{-(n-1)}u'^n + \ldots.$$

La racine V, après γ tours autour du point a_0, devient $(-1)^\alpha\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$; elle se change en une autre v_t que nous allons déterminer. D'après ce que nous avons dit au n° 404, les deux fonctions $\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$, $\varphi\left(\frac{\rho_0+16t}{n}\right)$ sont égales, ou égales et de signes contraires, lorsque leurs arguments satisfont à une relation de la forme

$$\frac{\rho_0+16t}{n} = \frac{8a'(1-2\gamma\rho_0)+(4b'+1)n\rho_0}{(4a+1)(1-2\gamma\rho_0)+2bn\rho_0} = \frac{8a' + [(4b'+1)n - 16a'\gamma]\rho_0}{(4a+1)+2[bn-(4a+1)\gamma]\rho_0},$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1) - 16ba' = 1$. Il faut pour cela que $bn - (4a+1)\gamma = 0$, ou $\frac{b}{4a+1} = \frac{\gamma}{n}$; ces deux fractions, étant irréduc-

tibles, auront leurs termes respectivement égaux, ou égaux et de signes contraires. Si n est de la forme $4n'+1$, on prendra $a = n'$, $b = \gamma$; la relation précédente se réduira alors à

$$\rho_0 + 16t = 8a' + [(4b'+1)n - 16a'\gamma]\rho_0;$$

on prendra $a' = 2t$, et l'on déterminera les deux nombres entiers $4b'+1$ et t par la condition $32\gamma t - n(4b'+1) = -1$. Si n est de forme $4n'-1$, on prendra $a = -n'$, $b = -\gamma$, $a' = -2t$, et l'on déterminera les deux autres nombres par la condition $32\gamma t + n(4b'+1) = -1$. Le rapport des deux fonctions φ étant $(-1)^a$ ou $(-1)^\alpha$, la racine V devient égale à v_t; les deux nombres conjugués γ et t sont liés par cette condition, que le produit $32\gamma t$ donne le résidu -1 par rapport au diviseur n.

En attribuant à γ les $n-1$ valeurs successives $1, 2, \ldots, n-1$, on obtient pour t ces mêmes valeurs dans un certain ordre; il y a d'ailleurs réciprocité entre les deux nombres; on en conclut que les n racines $V, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, dans un certain ordre, forment un système circulaire autour du point critique $u = 1$. Si l'on pose $V = (-1)^\alpha(1 - v')$, elles sont représentées par la série

$$(15) \qquad v' = 2^{\frac{n-1}{n}} u'^{\frac{1}{n}} + \ldots;$$

nous désignerons ce système circulaire par $(V, v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_{n-1}})$.

407. Considérons maintenant le lacet (a_1). Quand la variable u décrit l'arc $b_0 b_1$, d'après l'équation (9), ρ acquiert la valeur $\rho_0 + 2$; la racine V devient $(-1)^\alpha \varphi(n\rho_0 + 2n)$ ou $e^{\frac{2n\pi i}{8}} V$; la racine v_t devient $\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16t + 2}{n}\right) = \varphi\left[\frac{\rho_0 + 16(t-\alpha)}{n} + 2n\right]$, c'est-à-dire $e^{\frac{2n\pi i}{8}} v_{t-\alpha}$. Ceci est bien d'accord avec une remarque faite au n° **401**, savoir que, quand on remplace u par $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, les valeurs de v sont multipliées respectivement par $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$. Supposons que l'on parte du point b_0 avec la valeur initiale V; en b_1 on a cette même valeur multipliée par le facteur $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$; sur le lacet $b_1 a_1$, la racine acquerra la valeur qu'elle avait, au point

homologue, sur le lacet $b_0 a_0$, multipliée par ce facteur constant; quand on aura parcouru γ fois le lacet $b_1 a_1$, on aura en b_1 la valeur $e^{\frac{2n\pi i}{8}} v_{t_\gamma}$, qui, lorsqu'on revient en b_0, est $v_{t_\gamma+\alpha}$. Ainsi la loi de permutation sur le lacet (a_1) se déduit de celle qui a lieu sur le lacet (a_0), en ajoutant le nombre constant α aux indices des racines.

Considérons d'une manière générale le lacet (a_h). Quand la variable décrit l'arc $b_0 b_1 \ldots b_h$, ρ acquiert la valeur $\rho_0 + 2h$, la racine V devient égale à $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$ V, et la racine v_t à $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} v_{t-h\alpha}$. En partant du point b_0 avec la valeur initiale V, quand la variable u aura décrit γ fois le lacet $b_h a_h$, on aura en b_h la valeur $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} v_{t_\gamma}$, qui, au retour en b_0, est $v_{t_\gamma+h\alpha}$. Il suffit donc d'ajouter le nombre constant $h\alpha$ aux indices relatifs à la permutation sur le lacet (a_0) pour avoir la permutation sur le lacet (a_h).

408. La fonction elliptique, au module réciproque, admet les périodes $\omega_1 = \omega - \omega'$, $\omega'_1 = \omega'$ (n° **234**), et les valeurs de ρ et ρ_1, qui se rapportent à ces deux couples de périodes, sont liées par la relation $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} - 1$; on en déduit

$$u_1 = \varphi(\rho_1) = \psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{1}{u}.$$

Concevons que, dans l'équation modulaire, on remplace u par $\frac{1}{u}$, et désignons par (v) les racines de la nouvelle équation; il est facile de reconnaître que ces racines sont réciproques de celles de la première équation. Considérons d'abord la racine

$$(\mathrm{V}) = (-1)^\alpha \psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1} - 1\right)} = \frac{(-1)^\alpha}{\varphi\left[\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}\right]};$$

elle sera réciproque de la racine v_δ, si l'on a

$$\frac{\rho + 16\delta}{n} = \frac{8a' + [(4b'+1)n + 8a'(n-1)]\rho}{(4a+1) + [2bn + (4a+1)(n-1)]\rho}, \quad (-1)^{\alpha+a'} = (-1)^\alpha.$$

Il faut, pour cela, que le coefficient de ρ dans le second dénominateur soit nul, et, par conséquent, que les deux fractions irréductibles $\frac{2b}{4a+1}$,

$-\frac{n-1}{n}$ soient égales. Si n est de la forme $4n'+1$, on prendra $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, et l'on déterminera les deux nombres b' et δ par la condition $16(n-1)\delta+n(4b'+1)=1$. Si n est de la forme $4n'-1$, on prendra $a=-n'$, $b=2n'-1$, $a'=-2\delta$, et l'on déterminera b' et δ par la condition $16(n-1)\delta-n(4b'+1)=1$. Dans les deux cas, l'indice δ est tel, que le nombre 16δ donne le résidu -1 par rapport au diviseur n. On verrait de même que la racine $(v_{n-\delta})$ est réciproque de V.

Considérons maintenant une autre racine

$$(v_{t'})=\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}\right)=\frac{1}{\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}-1\right)}=\frac{1}{\varphi\left[\frac{16t'-(16t'-1)\rho}{16t'+n-(16t'+n-1)\rho}\right]};$$

elle sera réciproque de v_t si l'on a

$$\frac{\rho+16t}{n}=\frac{8(16t'+n)a'+16t'(4b'+1)-[(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a']\rho}{(16t'+n)(4a+1)+32t'b-[(16t'+n-1)(4a+1)+2(16t'-1)b]\rho}.$$

Le coefficient de ρ, dans le second dénominateur, doit être nul; la fraction $\frac{4a+1}{2b}$ est irréductible; la fraction $\frac{-16t'+1}{16t'+n-1}$ est aussi irréductible, si t' n'est pas égal à $n-\delta$; ces deux fractions étant égales, on prendra $a=-4t'$, $b=8t'+\frac{n-1}{2}$. Le second dénominateur se réduit alors à n. On déterminera les deux nombres b' et a' par la condition

$$(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a'=-1,$$

et l'on fera

$$t=(16t'+n)\frac{a'}{2}+t'(4b'+1)=\frac{2a'+b'}{4}.$$

Le nombre a' devant être pair, et b' multiple de 4, posons $a'=2a''$, $b'=4b''$; la condition précédente devient

$$(16t'-1)b''+(16t'+n-1)a''=-t',$$

ou

$$(16t'-1)t+na''=-t';$$

l'indice t est tel, que le nombre $(16t'-1)t$ donne le résidu $-t'$ par

rapport au diviseur n. Il y a exception, lorsque $t' = n - \delta$; mais nous avons vu que la racine $(v_{n-\delta})$ est réciproque de V. Quel que soit n, la racine (v_0) est réciproque de v_0.

L'étude des valeurs de v, quand la variable u est très-grande, est ramenée ainsi à celle des valeurs de (v), quand la variable u_1 est très-petite; les $n+1$ valeurs de (v) s'annulant pour $u_1 = 0$, les $n+1$ valeurs de v deviennent infinies pour $u = \infty$. Sur la sphère, le point $u = \infty$ est donc un point critique analogue aux précédents; la racine v_δ est méromorphe et du degré n; les n autres sont du degré $\frac{1}{n}$ et forment un système circulaire.

Comme exemple, nous écrirons les permutations pour $n = 5$:

Lacets :	(a_0)	(a_1)	(a_2)	(a_3)	(a_4)
	$(\mathrm{V}v_2v_1v_4v_3)$,	$(\mathrm{V}v_0v_4v_2v_3)$,	$(\mathrm{V}v_3v_2v_0v_1)$,	$(\mathrm{V}v_1v_0v_3v_2)$,	$(\mathrm{V}v_4v_3v_1v_0)$;

sur les lacets (a_5), (a_6), (a_7), les permutations sont les mêmes que sur (a_0), (a_1), (a_2), parce qu'il suffit d'ajouter 5α aux indices. On a, d'ailleurs,

$$(\mathrm{V}) = \frac{1}{v_4}, \quad (v_1) = \frac{1}{\mathrm{V}}, \quad (v_0) = \frac{1}{v_0}, \quad (v_2) = \frac{1}{v_3}, \quad (v_3) = \frac{1}{v_1}, \quad (v_4) = \frac{1}{v_2}.$$

Supposons que l'on unisse le point initial b_0 au point O', sur la sphère par un lacet formé d'un arc de grand cercle passant entre les points a_0 et a_7, et d'un petit cercle décrit autour du point O', dans le sens négatif par rapport à ce point; ce lacet peut être remplacé par un circuit positif se ramenant à la suite des lacets (a_0), (a_1), ..., (a_7), (O); la racine v_1 se reproduit, les autres se permutent dans l'ordre V, v_2, v_4, v_3, v_0.

409. Nous avons démontré au n° 401 l'existence de l'équation modulaire. On pourrait aussi la déduire des considérations précédentes; d'après le théorème du n° 135, la fonction v de u n'ayant pas sur toute la sphère de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, et admettant $n+1$ valeurs en chaque point, est liée à la variable u par une équation algébrique. Le lacet (a_0), parcouru une fois, et le lacet (O), décrit $n-1$ fois, forment un système de lacets fondamentaux; car, si l'on part du point b_0 avec la valeur initiale V, après le lacet (a_0) on a v_{t_1}; en décrivant ensuite $n-1$ fois le cercle O, on

obtient dans l'ordre des indices croissants les $n-1$ autres racines; on conclut de là que l'équation modulaire est du degré $n+1$ par rapport à v, et irréductible. La somme des ordres négatifs de la fonction v sur la sphère, c'est-à-dire la somme des degrés des racines infinies, étant $n+1$, il résulte du corollaire II du n° 135 que l'équation est aussi du degré $n+1$ par rapport à u.

Formation de l'équation modulaire.

410. Supposons l'équation entre u et v mise sous la forme entière, et ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de v. Les $n+1$ valeurs de v conservant des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de u, le coefficient du premier terme peut être supposé égal à l'unité.

Nous avons vu (n° 405) que, pour $u=0$, toutes les racines s'annulent; leur produit $(-1)^\alpha u^{n+1}$, déduit des équations (10) et (11), est le dernier terme de l'équation. Quand on attribue à u une valeur très-petite, tous les coefficients de l'équation, excepté le premier, ont des valeurs très-petites; il y a deux manières de former le groupe des termes du degré le moins élevé (n° 34); le premier mode $Auv+(-1)^\alpha u^{n+1}$ donne la racine holomorphe V, et l'on a, par conséquent, $A=-2^{\frac{n-1}{2}}$; le second mode $v^{n+1}+Auv$ donne le système circulaire des n autres racines.

D'après une remarque faite au n° 403, l'équation se reproduit, quand on y remplace u et v respectivement par v et $(-1)^\alpha u$, et qu'on multiplie tous les termes par $(-1)^\alpha$; le premier et le dernier terme se permutent; il en résulte que les coefficients des différentes puissances de v sont, par rapport à u, du degré n au plus, et par conséquent que le degré de l'équation modulaire, par rapport aux deux variables u et v, ne surpasse pas $2n$. D'après ce que nous avons dit au n° 408, l'équation se reproduit aussi quand on y remplace u et v respectivement par $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$, et qu'on multiplie tous les termes par $(-1)^\alpha u^{n+1}v^{n+1}$; le terme Auv donnera le terme $(-1)^\alpha Au^nv^n$; on en conclut que l'équation modulaire est bien du degré $2n$. L'équation ne changeant pas quand on y remplace u et v par $-u$ et $-v$, tous les termes sont d'un degré pair.

Les coefficients de l'équation en ξ (n° **401**) sont des polynômes entiers en u^8; pour $u=0$, la première racine est finie et égale à $(-1)^\alpha 2^{-\frac{n-1}{2}}$; les autres deviennent infinies; cette équation est donc de la forme

$$(16)\qquad u^{8\beta_0}\xi^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n-1} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \ldots)\,\xi^{n+1-p} + \left(-2^{\frac{n-1}{2}} + b_n u^8 + \ldots\right)\xi + (-1)^\alpha = 0,$$

les exposants $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ étant tous plus grands que zéro. En remplaçant ξ par $\frac{v}{u^n}$, et multipliant tous les termes par u^{n+1}, on obtient l'équation modulaire

$$(17)\qquad u^{8(\beta_0-\alpha)}v^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n-1} u^{np+8(\beta_p-\alpha)}(a_p + b_p u^8 + \ldots)\,v^{n+1-p} + u\left(-2^{\frac{n-1}{2}} + b_n u^8 + \ldots\right)v + (-1)^\alpha u^{n+1} = 0.$$

Le premier coefficient devant se réduire à l'unité, on a $\beta_0 = \alpha$. Les exposants $np + 8(\beta_p - \alpha)$ sont plus grands que zéro; on prendra pour chacun d'eux la plus petite valeur de cette forme, et, dans les polynômes placés entre parenthèses, on ira jusqu'à une puissance de u^8 telle, que le degré total du coefficient ne surpasse pas n. On aura ensuite à déterminer un certain nombre de coefficients numériques; la condition que l'équation doit se reproduire, après chacune des deux substitutions dont nous avons parlé plus haut, en restreint beaucoup le nombre; d'après ce que nous avons dit au n° **406**, le premier membre devant pour $u=1$ se réduire à $(v-1)\,[v-(-1)^\alpha]^n$, on aura encore entre ces coefficients des relations qui suffiront à les déterminer dans les cas les plus simples.

411. Quand le nombre premier n ne surpasse pas 7, les polynômes placés entre parenthèses se réduisent à des constantes. Pour $n=3$, on obtient immédiatement l'équation modulaire

$$(18)\qquad v^4 + 2u^3v^3 - 2uv - u^4 = 0.$$

Pour $n=5$, elle est de la forme

$$v^6 + 4u^5v^5 + a_2u^2v^4 - a_2u^4v^2 - 4uv - u^6 = 0;$$

le premier membre devant se réduire à $(v-1)(v+1)^4$ pour $u=1$, on a $a_2=5$, et l'équation modulaire est

$$(19)\qquad v^6+4u^5v^5+5u^2v^4-5u^4v^2-4uv-u^6=0.$$

Pour $n=7$, on trouve de même

$$(20)\quad v^8-8u^7v^7+28u^6v^6-56u^5v^5+70u^4v^4-56u^3v^3+28u^2v^2-8uv+u^8=0.$$

Pour $n=11$, l'équation modulaire est de la forme

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} v^{12}+u^3(a_1+2^5u^8)v^{11}+a_2u^6v^{10}-u(a_1-b_3u^8)v^9 \\ +a_4u^4v^8+a_5u^7v^7+u^2(a_2-a_2u^8)v^6-a_5u^5v^5-a_4u^8v^4 \\ -u^3(b_3-a_1u^8)v^3-a_2u^6v^2-u(2^5+a_1u^8)v-u^{12}=0. \end{array}\right.$$

Le premier membre devant se réduire à $(v-1)(v+1)^{11}$ pour $u=1$, on a $a_1=-22$, $a_2=44$, $a_4=165$, $a_5=132$, $b_3=88$.

Dans tous les cas, le calcul des coefficients peut être effectué de la manière suivante. Supposons que la fonction $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi\rho i}{8}}\varphi(\rho)$, donnée par la formule (3) du n° **402**, ait été développée en série suivant les puissances entières de $q=e^{\pi\rho i}$; en remplaçant dans ce développement q par q^n, on aura celui de $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{n\pi\rho i}{8}}\varphi(n\rho)$; les deux quantités u et V sont égales à ces deux séries entières, multipliées respectivement par $\sqrt{2}q^{\frac{1}{8}}$ et par $(-1)^\alpha\sqrt{2}q^{\frac{n}{8}}$. Si on les substitue dans l'équation (17), et si l'on divise tous les termes par $q^{\frac{n+1}{8}}$, le résultat de la substitution ne contiendra plus que des puissances entières de q; en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes, et égalant à zéro les coefficients des puissances successives de q, on obtiendra des équations linéaires entre les coefficients cherchés qui serviront à les déterminer. Il faudra pousser le développement en série assez loin pour avoir un nombre suffisant d'équations. Sohnke a calculé par ce procédé les coefficients des équations modulaires jusqu'au nombre premier 19 inclusivement (*Journal de Crelle*, t. XVI).

Points multiples.

412. Outre les points critiques, il existe des points multiples dans le voisinage desquels chacune des racines reste holomorphe.

L'équation (17) du n° 371 devient

$$(22)\qquad g_1^2 = \frac{nu(1-u^8)}{v(1-v^8)}\frac{dv}{du}.$$

Lorsque, pour une valeur particulière de u, deux valeurs de v deviennent égales, les carrés des multiplicateurs correspondants sont différents, sans quoi les deux fonctions de transformation seraient égales, ou égales et de signes contraires, ce qui est impossible (n° 397); il en résulte que les deux valeurs de $\frac{dv}{du}$ diffèrent, et par conséquent que les points multiples de la courbe analytique représentée par l'équation modulaire sont à tangentes distinctes.

Nous allons démontrer qu'il n'y a pas d'autres points multiples que des points doubles. Au point u, si l'on suit un chemin convenable, trois racines quelconques peuvent être représentées par $(-1)^\alpha\varphi(n\rho)$, $\varphi\left(\frac{n}{\rho}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right)$, t étant un certain nombre plus petit que n. Pour qu'elles soient égales, il est nécessaire que l'on ait

$$(23)\qquad n\rho = \frac{8a'n+(4b'+1)\rho}{(4a+1)n+2b\rho} = \frac{8a'_1n+16t(4b'_1+1)+(4b'_1+1)\rho}{(4a_1+1)n+32b_1t+2b_1\rho},$$

avec les conditions

$$(24)\qquad \begin{cases} (4a+1)(4b'+1)-16ba'=1, & (-1)^{a+a'}=(-1)^\alpha. \\ (4a_1+1)(4b'_1+1)-16b_1a'_1=1, & (-1)^{a_1+a'_1}=(-1)^\alpha. \end{cases}$$

La quantité imaginaire ρ satisferait aux deux équations du second degré

$$(25)\qquad \begin{cases} 2b_1n\rho^2+[(4a+1)n^2-(4b'+1)]\rho-8a'n=0, \\ 2b_1n\rho^2+[(4a_1+1)n^2+32b_1tn-(4b'_1+1)]\rho-8a'_1n-16t(4b'_1+1)=0, \end{cases}$$

dont les coefficients seraient proportionnels; on aurait donc

$$(26)\qquad b_1a'n = b[a'_1n+2t(4b'_1+1)],$$

$$(27)\qquad b_1[(4a+1)n^2-(4b'+1)] = b[(4a_1+1)n^2+32b_1tn-(4b'_1+1)].$$

Nous remarquons d'abord que les deux nombres b et b_1 sont premiers avec n; supposons, par exemple, que b soit divisible par n; d'après la

première des relations (24), le nombre $4b'+1$ serait premier avec n; en vertu de la relation (27), b_1 serait aussi divisible par n, et, par suite, $4b'_1+1$ serait premier avec n; cette même relation (27) apprend alors que les deux nombres b et b_1 seraient divisibles par une même puissance de n, ce qui est impossible d'après la relation (26). Cela posé, en vertu de cette relation (26), le nombre $4b'_1+1$ doit être divisible par n, et, par suite, d'après la relation (27), le nombre $4b'+1$ est aussi divisible par n. Posons $4b'+1=n(2\beta+1)$; la condition pour que la première des équations (25) ait ses racines imaginaires devient

$$[(4a+1)n-(2\beta+1)]^2+64ba'<0,$$

et se réduit à

$$[(4a+1)n+(2\beta+1)]^2<4,$$

en tenant compte de la première des relations (24). Le nombre entier pair $(4a+1)n+(2\beta+1)$, devant avoir son carré plus petit que 4, est nul; cette relation (24) se réduit alors à $(2\beta+1)^2+16ba'=-1$, ce qui est impossible. Ainsi, en un même point u, trois racines de l'équation modulaire ne peuvent être égales entre elles, et, par conséquent, à part les points critiques, tous les points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes. Il est clair que ces points sont situés huit par huit aux sommets d'un octogone régulier.

413. On obtiendra ces points doubles en égalant à zéro le discriminant de l'équation modulaire, lequel a pour expression $D=\Pi(v_i-v_h)^2$, v_i et v_h étant deux racines quelconques; cette fonction symétrique des racines est égale à une fonction rationnelle de u, et, comme elle ne devient infinie pour aucune valeur finie de u, elle est entière. Évaluons son degré : pour $u=\infty$, les $n+1$ racines de l'équation modulaire deviennent infinies : l'une est du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$ (n° 408); n facteurs binômes v_i-v_h sont du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$, et, par conséquent, le discriminant est un polynôme entier en u du degré $2n^2+n-1$. Pour $u=0$, les $n+1$ racines de l'équation modulaire s'annulent; l'une est du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$ (n° 405); chaque facteur binôme est un infiniment petit du degré $\frac{1}{n}$, et, par con-

séquent, le polynôme D est divisible par u^{n+1}. Pour $u = 1$, une racine devient égale à 1, et les autres à $(-1)^\alpha$; lorsque le nombre α est pair, toutes les racines deviennent égales; si l'on pose $u = 1 - u'$, tous les facteurs binômes sont infiniment petits et du degré $\frac{1}{n}$ par rapport à u' (n° 406); le polynôme D est donc divisible par u'^{n+1} ou par $(1 - u)^{n+1}$; la même chose ayant lieu en chacun des points critiques $u = e^{\frac{2k\pi i}{8}}$, on en conclut que le polynôme est divisible par $(1 - u^8)^{n-1}$. Lorsque le nombre α est impair, une racine est égale à 1, les autres à -1; parmi les facteurs binômes, $v - v'$, n ont des valeurs finies voisines de 2, les autres sont infiniment petits et du degré $\frac{1}{n}$; le polynôme D est divisible par $(1 - u^8)^{n-1}$. D'une manière générale, le polynôme D est divisible par $(1 - u^8)^{n+(-1)^\alpha}$. Ainsi le discriminant est de la forme

$$D = u^{n+1}(1 - u^8)^{n+(-1)^\alpha}[a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \ldots + a_m u^{8m}].$$

Les deux premiers facteurs se rapportent aux points critiques; le polynôme placé entre parenthèses, et qui est du degré

$$8m = 8\left[\frac{n^2-1}{4} - n - (-1)^\alpha\right],$$

donne les points doubles.

Soit $f(u, v) = 0$ l'équation modulaire. En prenant le discriminant sous la forme $D = \Pi f'_{v_i}(u, v_i)$, on reconnaît sans peine que ce polynôme est carré parfait; on voit aussi qu'il est réciproque. Le nombre des points doubles est donc $n^2 - 1 - 4n - 4(-1)^\alpha$.

Calcul des fonctions de transformation.

414. Proposons-nous maintenant de calculer les fonctions de transformation. La première de ces fonctions est (n° 349)

$$\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = g_1 \frac{\lambda(z, \omega, \omega')\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}. \tag{28}$$

Si l'on pose

$$x = u^2\lambda(z, \omega, \omega'), \quad y = v^2\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

et si l'on se sert des polynômes $V(x)$ définis au n° 371, la question

est ramenée à la détermination de la fraction rationnelle

$$(29) \qquad y = \frac{V_1(x)}{V(x)}.$$

D'après la première des relations (15) de ce même numéro, les deux polynômes ont les mêmes coefficients; nous les représenterons par

$$\begin{aligned} V(x) &= a^{(0)} + a^{(1)}x^2 + a^{(2)}x^4 + \ldots + a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}, \\ V_1(x) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x + a^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^3 + \ldots + a^{(1)}x^{n-2} + a^{(0)}x^n\right]. \end{aligned}$$

Le calcul de ces coefficients peut être effectué à l'aide de la relation (16), entre trois coefficients consécutifs, que l'on déduit de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi. Si l'on y remplace α par sa valeur $\frac{1}{2}\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right)$, cette relation devient

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 2m(n-2m)\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right)a^{(m)} \\ &\quad + \frac{n}{2}\,\frac{1-u^8}{u^3}\,\frac{da^{(m)}}{du} + (n-2m+1)(n-2m+2)a^{(m-1)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Le premier et le dernier coefficient sont

$$(31) \qquad a^{(0)} = \sqrt{\frac{g_1 k'_1}{nk'}}, \quad a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} g_1 \frac{v^2}{u^2} a^{(0)},$$

et, en vertu de l'équation (22), on a,

$$(32) \qquad (a^{(0)})^4 = \frac{1}{n}\,\frac{u}{v}\,\frac{dv}{du} = -\frac{1}{n}\,\frac{uf'_u}{vf'_v}.$$

Afin d'éviter les quantités irrationnelles, nous mettrons l'équation (30) sous la forme

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)\frac{a^{(m+1)}}{a^{(m)}} + \frac{n}{8}\,\frac{1-u^8}{u^3}\,\frac{d\log\left(\frac{a^{(m)}}{a^{(0)}}\right)^4}{du} \\ &\quad + (n-2m+1)(n-2m+2)\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}} \\ &\quad + 2m(n-2m)\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right) + \frac{n}{8}\,\frac{1-u^8}{u^3}\,\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = 0. \end{aligned} \right.$$

Le dernier terme est connu et rationnel, d'après l'équation (32). En faisant successivement $m = 0$, $m = 1$, $m = 2, \ldots$, on obtiendra les rapports des coefficients au premier, exprimés par des fractions rationnelles en u et v. La connaissance de ces rapports suffit pour la détermination de la fonction de transformation (29).

D'après le raisonnement du n° 387, les deux quantités

$$\pm g_1 = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2(p\varepsilon)\,\nu^2(p\varepsilon)}{\mu^2(p\varepsilon)}, \quad k'k'_1 = k'^{n+1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu^4(p\varepsilon)},$$

données par les formules (5) et (11) des numéros **349** et **351**, peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de u et v. Il en résulte d'abord que la quantité $k'^2 k_1'^2$ ou $(1-u^8)(1-v^8)$ est égale au carré d'une expression rationnelle en u et v. De l'équation (22) on déduit

$$(34) \qquad g_1^2 = -\frac{nu(1-u^8)f'_u}{v(1-v^8)f'_v} = n^2 \frac{[u(1-u^8)f'_u]^2}{(1-u^8)(1-v^8)(-nuvf'_u f'_v)};$$

la quantité $-nuvf'_u f'_v$ doit aussi être égale au carré d'une expression rationnelle en u et v; en prenant la racine carrée, on aura le multiplicateur g_1, exprimé rationnellement au moyen de u et v.

De l'équation (30), dans laquelle on ferait $m = 0$ et $m = \frac{n-1}{2}$, on déduit

$$(35) \qquad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}} = -\frac{n}{16} \cdot \frac{1-u^8}{u^3} \frac{d\log(a^{(0)})^4}{du},$$

$$(36) \qquad \frac{a^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}}{a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} = -\frac{n-1}{6} \frac{1+u^8}{u^4} - \frac{n}{48} \frac{1-u^8}{u^3} \frac{d\log\left[a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^4}{du}.$$

On obtiendra ainsi le deuxième et l'avant-dernier coefficient.

415. On peut aussi se servir, pour le calcul des coefficients, de deux équations différentielles simultanées, analogues aux équations différentielles d'Abel (n° 345), et auxquelles satisfont les deux fonctions V

et V_1. Ces équations sont

$$(37)\quad \begin{cases} (1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\dfrac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\dfrac{dV_1}{dx}\right)^2\right] \\ \quad +2(x^3-\alpha x)V_1\dfrac{dV_1}{dx}+\dfrac{v^2}{u^2}g_1^2V^2-\left(nx^2+2\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)V_1^2=0, \\ (1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\dfrac{d^2V}{dx^2}-\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2\right] \\ \quad +2(x^3-\alpha x)V\dfrac{dV}{dx}+\dfrac{v^2}{u^2}g_1^2V_1^2-\left(nx^2+2\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)V^2=0, \end{cases}$$

2α désignant la quantité $k+\frac{1}{k}$ ou $u^4+\frac{1}{u^4}$. Si l'on y remplace V et V_1 par leurs valeurs, et que l'on égale à zéro l'ensemble des termes du même degré, on aura des relations entre les coefficients $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$.

Nous appliquerons ces méthodes aux cas les plus simples.

Transformation du troisième degré.

416. Pour $n=3$, l'équation modulaire (n° **411**) est (18)

$$f(u,v)=\tfrac{1}{2}(v^4-u^4-2uv+2u^3v^3)=0.$$

Si l'on représente par t le produit uv, on a

$$uf'_u=3t^3-t-2u^4,\quad vf'_v=3t^3-t+2v^4,\quad -uvf'_uf'_v=3t^2(1-t^2)^2.$$

On déduit d'ailleurs de l'équation modulaire la relation

$$(38)\qquad (1-u^8)(1-v^8)=(1-u^2v^2)^4;$$

il en résulte

$$g_1=\frac{(3t^3-t-2u^4)(1-t^2)}{t(1-v^8)}=\frac{2u^3+v}{-v}.$$

Les formules relatives à la transformation du troisième degré sont donc

$$(39)\qquad g_1=\frac{2u^3+v}{-v},\quad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=-g_1\frac{u^2}{v^2},\quad y=\frac{g_1\dfrac{v^2}{u^2}x-x^3}{1-g_1\dfrac{v^2}{u^2}x^2}.$$

Lorsque le module k est réel et plus petit que l'unité, le multiplicateur de la première fonction est réel et positif. Pour les valeurs très-petites de u, on a approximativement $v = -\frac{1}{2}u^3$, $g_1 = 3$, ce qui détermine le signe. Mais on peut supposer que, dans les formules précédentes, v désigne l'une quelconque des quatre racines de l'équation modulaire; car, lorsque la variable u décrit différents lacets, la racine V, sur laquelle nous avons raisonné, reproduit toutes les autres, et la fonction de transformation correspondante devient égale à chacune des autres, ou égale et de signe contraire : cela dépend du signe de g_1. Les formules (39) représentent ainsi les quatre transformations du troisième degré.

Transformation du cinquième degré.

417. Nous mettrons l'équation modulaire (19) sous la forme

$$(40)\qquad f(u, v) = (u^2 - v^2)^3 + 8u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0.$$

En prenant les dérivées partielles du polynôme, et retranchant trois fois ce polynôme, on a

$$uf'_u = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2] - 8uv(1 + u^4v^4),$$
$$-vf'_v = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2] + 8uv(1 + u^4v^4).$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(41)\qquad \begin{gathered} G = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2], \quad H = 8uv(1 + u^4v^4), \\ uf'_u = P = G - H, \quad -vf'_v = Q = G + H. \end{gathered}$$

Si, dans l'expression

$$H^2 = 64[u^2v^2(1 - u^4v^4)^2 + 4u^6v^6],$$

on remplace $uv(1 - u^4v^4)$ par sa valeur tirée de l'équation (40), on trouve

$$(42)\qquad H^2 = 4(u^2 + v^2)^2[(u^2 - v^2)^4 + 12u^2v^2(u^2 - v^2)^2 + 16u^4v^4],$$

et, par suite,

$$(43)\qquad PQ = G^2 - H^2 = 5(u^2 + v^2)^2(u^2 - v^2)^4.$$

On a aussi

$$(44) \qquad (1-u^8)(1-v^8) = \frac{(u^2-v^2)^6}{16u^2v^2},$$

$$g_1 = \frac{(u^2-v^2)P}{-4uv(1-v^8)(u^2+v^2)} = \frac{v-u^5}{v(1-uv^3)}, \quad \frac{a^{(2)}}{a^{(0)}} = g_1\frac{u^2}{v^2},$$

$$(a^{(0)})^4 = \frac{1}{5}\frac{P}{Q}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{v}{u}\frac{P}{Q}.$$

On calculera le rapport du second coefficient au premier à l'aide de l'équation (35)

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}} = -\frac{5}{16}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}.$$

On a

$$\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u} + \left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial u},$$

et, en remplaçant $\frac{dv}{du}$ par sa valeur,

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = \left(v\frac{\partial P}{\partial v} - u\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1}{PQ}\left(Q^2u\frac{\partial P}{\partial u} - P^2v\frac{\partial Q}{\partial v}\right).$$

Si, dans le dernier terme, on met à la place de Q^2 et de P^2 les quantités égales $PQ + 2HQ$, $PQ - 2HP$, cette équation devient

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = -2\left(u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v}\right) + \frac{2H}{PQ}\left(Qu\frac{\partial P}{\partial u} + Pv\frac{\partial Q}{\partial v}\right).$$

Calculons le dernier terme

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u} + Pv\frac{\partial Q}{\partial v} = G\left(u\frac{\partial G}{\partial u} + v\frac{\partial G}{\partial v}\right) + H\left(u\frac{\partial G}{\partial u} - v\frac{\partial G}{\partial v}\right) - H\left(u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v}\right).$$

Comme on a

$$u\frac{\partial G}{\partial u} + v\frac{\partial G}{\partial v} = 6G, \quad u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v} = 16uv(1+5u^4v^4),$$

$$u\frac{\partial G}{\partial u} - v\frac{\partial G}{\partial v} = 2(u^2-v^2)[9(u^2-v^2)^2 + 32u^2v^2],$$

il vient

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u}+Pv\frac{\partial Q}{\partial v}=6G^2+2H(u^2-v^2)[9(u^2-v^2)^2+32u^2v^2]-16Huv(1+5u^4v^4),$$

et, en remplaçant G^2 par $PQ+H^2$,

$$Qu\frac{dP}{du}+Pv\frac{dQ}{dv}=6PQ+2H[9(u^2-v^2)^3+32u^2v^2(u^2-v^2)+16uv(1-u^4v^4)];$$

en vertu de l'équation modulaire (40), cette expression se réduit à

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u}+Pv\frac{\partial Q}{\partial v}=6PQ+10H(u^2-v^2)^3.$$

On a ainsi

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=64uv(1-u^4v^4)+\frac{20H^2(u^2-v^2)^3}{PQ},$$

et, en remplaçant H^2 et PQ par leurs valeurs (42) et (43), et tenant compte de l'équation modulaire,

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\frac{64u^2v^2(u^2+v^2)^2}{u^2-v^2},\quad \frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\frac{64uv^2P}{4(u^2-v^2)^5}.$$

On en déduit

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=-4\frac{v^2(1-u^8)P}{u^2(u^2-v^2)^5}=-g_1\frac{v(u^2+v^2)}{u^3}.$$

On obtient de cette manière la formule de transformation

$$(45)\qquad g_1=\frac{v-u^5}{v(1-uv^3)},\quad y=\frac{g_1\dfrac{v^2}{u^2}x-g_1\dfrac{v(u^2+v^2)}{u^3}x^3+x^5}{1-g_1\dfrac{v(u^2+v^2)}{u^3}x^2+g_1\dfrac{v^2}{u^2}x^4},$$

On arrive plus rapidement au résultat en se servant de l'une des équations (37). Parmi les relations qu'elle fournit, les deux premières sont

$$6\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2+8\alpha\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}-\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^4-12\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}+5=0,$$

$$\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2\left[\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2-4\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}-3\right]-8\alpha\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}+2\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^3-4\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2+10\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}=0.$$

L'élimination des termes contenant $\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}$ à la première puissance donne

$$\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2 = \frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\left[\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2 - 2\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right) + 5\right];$$

on verra que le second membre est carré, et l'on fera le choix du signe en substituant dans l'une des deux relations.

Pour $n = 3$, l'équation modulaire n'a pas de point double; pour $n = 5$, elle en a huit (n° **413**). Le produit PQ, donné par la formule (43), est nul en tous les points où deux racines sont égales; le second facteur $u^2 - v^2$ correspond aux points critiques, le premier $u^2 + v^2$ aux points doubles; mais l'équation (40), dans laquelle on fait $v^2 = -u^2$, se réduit à $u^8 + 1 = 0$, de sorte que le discriminant est $u^6(1 - u^8)^4(1 + u^8)^2$.

Transformation du septième degré.

418. L'équation modulaire (20) se met sous la forme

$$(46) \qquad f(u, v) = \frac{1}{8}[(1 - u^8)(1 - v^8) - (1 - uv)^8] = 0.$$

Nous poserons

$$uv = t, \quad P = t(1 - t)^7 + t^8,$$

d'où

$$u^8 + v^8 = 1 + t^8 - (1 - t)^8 = 1 + P - (1 - t)^7.$$

On en déduit

$$(47) \qquad \begin{cases} uf'_u = P - u^8 = \dfrac{(1 - t)^7(t - u^8)}{1 - u^8}, \\ vf'_v = P - v^8 = \dfrac{(1 - t)^7(t - v^8)}{1 - v^8}, \\ (P - u^8)(P - v^8) = -7t^2(1 - t)^8(1 - t + t^2)^2, \end{cases}$$

$$g_1 = \frac{(1 - u^8)(u^8 - P)}{t(1 - t^8)(1 - t + t^2)} = \frac{u^8 - t}{t(1 - t)(1 - t + t^2)},$$

$$(a^{(0)})' = -\frac{1}{7}\frac{P - u^8}{P - v^8}, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{v(P - u^8)}{u(P - v^8)}.$$

L'équation (35) nous donnera le rapport du second coefficient au premier. On a

$$u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\left(u\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial u}-8u^8\right)\frac{\mathrm{P}-v^8}{\mathrm{P}-u^8}+\left(v\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial v}-8v^8\right)\frac{\mathrm{P}-u^8}{\mathrm{P}-v^8}-u\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial u}-v\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial v}:$$

en remarquant que

$$u\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial u}=v\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial v}=t(1-t)^7-7t^2(1-t)^6+8t^8=8\mathrm{P}-7t(1-t)^6,$$

cette équation se simplifie et devient

$$u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=-8(u^8+v^8)-7t(1-t)^6\left(\frac{\mathrm{P}-v^8}{\mathrm{P}-u^8}+\frac{\mathrm{P}-u^8}{\mathrm{P}-v^8}-2\right)$$
$$=-8(u^8+v^8)+\frac{(u^8-v^8)}{t(1-t)^2(1-t+t^2)^2}.$$

Si l'on remplace $(u^8-v^8)^2$ par sa valeur

$$(u^8-v^8)^2=(u^8+v^8)^2-4t^8=(u^8+v^8-2t^4)(u^8+v^8+2t^4)$$
$$=[(1-t^4)^2-(1-t)^8]\,[(1+t^4)^2-(1-t)^8]$$
$$=[(1-t^4)-(1-t)^4]\,[(1-t^4)+(1-t)^4]\,[(1+t^4)-(1-t)^4]\,[(1+t^4)+(1-t)^4]$$
$$=16t^2(1-t)^2(1-t+t^2)^2(2-t+t^2)(1-t+2t^2)(2-3t+2t^2),$$

on trouve

$$u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=16t^2(1-t+t^2)(2-t+2t^2),$$

$$\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=-\frac{16}{7}\,\frac{\mathrm{P}-u^8}{u}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)^8(1-t+t^2)},$$

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=\frac{(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)}{u^4}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)^8(1-t+t^2)}=\frac{t-u^8}{u^4}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)(1-t+t^2)}.$$

419. Nous connaissons le dernier coefficient $a^{(3)}=-g_1\frac{v^4}{u^4}a^{(0)}$. On en déduit, en remplaçant g_1 par sa valeur tirée de l'équation (31),

$$(a^{(3)})^2=49\,\frac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v_8)}\,(a^{(0)})^8.$$

L'équation (36) nous donnera le rapport de l'avant-dernier coefficient au dernier. On a

$$\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du} = \frac{d\log\dfrac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v^8)}}{du} + \frac{3}{2}\,\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du},$$

$$\begin{aligned} u(\mathrm{P}-v^8)\,\frac{d\log\dfrac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v^8)}}{du} &= 4(u^8+v^8-2\mathrm{P}) - 8\,\frac{u^8(1-v^8)(\mathrm{P}-v^8)+v^8(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)}{(1-u^8)(1-v^8)} \\ &= 4(u^8+v^8-2\mathrm{P}) - 8\,\frac{t(u^8+v^8)-2t^8}{1-t} \\ &= 24t(1-t+t^2)(1-4t+4t^2-4t^3+t^4), \end{aligned}$$

$$u(\mathrm{P}-v^8)\,\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du} = 24t(1-t+t^2)^3,$$

$$\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du} = -\frac{24}{7}\,\frac{(\mathrm{P}-u^8)(1-t+t^2)}{ut(1-t)^8},$$

et, par suite,

$$\frac{a^{(2)}}{a^{(3)}} = -\frac{1+u^8}{u^4} + \frac{(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)(1-t+t^2)}{u^4\,t(1+t)^8} = \frac{t^3-u^8}{u^4\,t(1-t)}.$$

On obtient ainsi les formules

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} & g_1 = \frac{u^8-t}{t(1-t)(1-t+t^2)}, \qquad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}} = -g_1\,\frac{t(2-t+2t^2)}{u^4}, \\ & \frac{a^{(2)}}{a^{(0)}} = -g_1\,\frac{(t^3-u^8)t}{u^8(1-t)}, \qquad \frac{a^{(3)}}{a^{(0)}} = -g_1\,\frac{v^2}{u^2}, \\ & y = -\frac{\dfrac{a^{(3)}}{a^{(1)}}x + \dfrac{a^{(2)}}{a^{(0)}}x^3 + \dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}x^5 + x^7}{1 + \dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}x^2 + \dfrac{a^{(2)}}{a^{(0)}}x^4 + \dfrac{a^{(3)}}{a^{(0)}}x^6}. \end{aligned}\right.$$

Pour $n = 7$, l'équation modulaire a seize points doubles; d'après la troisième des formules (47), ils sont donnés par l'équation $1 - t + t^2 = 0$; puisque $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$, on a $t^3 = -1$, et par suite, $u^8 + v^8 = 2t$, $u^8 v^8 = t^2$; on en déduit $u^8 = v^8 = t$, d'où $1 - u^8 + u^{16} = 0$. Ainsi le discriminant est $u^8(1-u^8)^8(1-u^8+u^{16})^2$.

82.

Équation différentielle entre les modules.

420. Nous avons vu (n° 279) qu'une période quelconque de l'intégrale elliptique de première espèce satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(49) \qquad \frac{d\left(kk'^2\frac{d\xi}{dk}\right)}{dk} - k\xi = 0,$$

qui admet, par conséquent, pour intégrale générale $\xi = a\omega + b\omega'$, a et b étant deux constantes arbitraires. Si l'on pose $\zeta = kk'^2\xi^2$, cette équation devient

$$(50) \qquad 2\zeta\frac{d^2\zeta}{dk^2} - \left(\frac{d\zeta}{dk}\right)^2 + \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}\right)^2\zeta^2 = 0.$$

Considérons une autre solution $a'\omega + b'\omega'$ de l'équation (49), et posons

$$\rho = \frac{a'\omega + b'\omega'}{a\omega + b\omega'},$$

nous aurons, en vertu de la relation (35) du n° 279,

$$\xi^2\frac{d\rho}{dk} = (ab' - ba')\left(\omega\frac{d\omega'}{dk} - \omega'\frac{d\omega}{dk}\right) = -\frac{2\pi i(ab' - ba')}{kk'^2},$$

et, par suite,

$$\zeta = -2\pi i(ab' - ba')\frac{dk}{d\rho}.$$

En substituant dans l'équation (50), et laissant la variable indépendante quelconque, on obtient l'équation

$$(51) \qquad 2dk\,d^3k - 3(d^2k)^2 + \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}\right)^2 dk^4 = \left(\frac{dk}{d\rho}\right)^2[2d\rho\,d^3\rho - 3(d^2\rho)^2].$$

En appelant ω_1, ω'_1 les périodes elliptiques relatives à un autre module k_1, et posant

$$\rho_1 = \frac{a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1}{a_1\omega_1 + b_1\omega'_1},$$

on a de même

$$2\,dk_1\,d^3k_1 - 3(d^2k_1)^2 + \left(\frac{1+k_1^2}{k_1k_1'^2}\right)^2 (dk_1)^4 = \left(\frac{dk_1}{d\rho_1}\right)^2 [2\,d\rho_1\,d^3\rho_1 - 3(d^2\rho_1)^2].$$

Lorsque les deux modules k et k_1 varient simultanément, de manière que l'on ait constamment $\rho_1 = \rho$, des deux équations précédentes on déduit l'équation différentielle du troisième ordre

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &2\,dk\,dk_1(dk\,d^3k_1 - dk_1\,d^3k) - 3[(dk\,d^2k_1)^2 - (dk_1\,d^2k)^2] \\ &\qquad + (dk\,dk_1)^2\left[\left(\frac{1+k_1^2}{k_1k_1'^2}\,dk_1\right)^2 - \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}\,dk\right)^2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

La relation $\rho_1 = \rho$, qui est de la forme

$$(53)\qquad \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\alpha'\omega + \beta'\omega'}{\omega + \beta\omega'},$$

α', β', β étant trois constantes arbitraires, en est l'intégrale générale.

Les deux couples de périodes des fonctions elliptiques qui résolvent le problème de la transformation satisfont à une relation de cette forme (n° 390); on en conclut, comme cas particulier, que l'équation modulaire, quel que soit son degré, donne une solution de l'équation (52). (Jacobi, *Fundamenta nova.*)

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

421. Galois avait annoncé que, jusqu'à $n = 11$, le degré de l'équation modulaire peut être abaissé d'une unité. MM. Hermite et Betti ont donné de ce théorème deux démonstrations basées sur des principes différents. Considérons une fonction symétrique ou alternée (v_α, v_β) de deux racines de l'équation modulaire, puis la même fonction de deux autres racines, et ainsi de suite jusqu'aux deux dernières racines, et désignons par U une fonction symétrique de ces $\frac{n+1}{2}$ quantités; on démontre aisément, à l'aide des lois de permutation établies précédemment, que, lorsque n ne surpasse pas 11, parmi les différentes manières d'associer les racines deux à deux, il en est pour lesquelles la fonction U n'acquiert que n valeurs pour chaque valeur de u et, par conséquent, satisfait à une équation du degré n.

Autour de chacun des points critiques, une racine v_α reste holomorphe, et la racine associée v_β acquiert les n autres valeurs; la quantité (v_α, v_β) et, par conséquent, la fonction U prennent n valeurs, formant un système circulaire. Si cette fonction n'acquiert dans toute l'étendue du plan que n valeurs, il est impossible que deux de ces valeurs aient un élément commun (v_α, v_β); car, par un chemin convenable, v_α devient égal à la racine qui reste holomorphe autour de l'un des points critiques; si deux valeurs de U avaient un élément commun (v_α, v_β), sans être identiques, elles engendreraient deux systèmes circulaires de n valeurs chacun. On peut associer deux racines v_α et v_β prises à volonté; car, autour du point critique où v_α reste holomorphe, v_β acquiert les n autres valeurs. Dans une valeur de la fonction U, deux éléments ne peuvent présenter une même différence d'indices, parce que, si l'on décrivait le lacet (O) un certain nombre de fois, l'un des éléments de-

viendrait égal à l'autre. Dès qu'on a reconnu que le lacet (a_0) fait acquérir à la fonction U les mêmes valeurs que le lacet (O), on est certain que cette fonction n'a que n valeurs dans tout le plan, les autres lacets se ramenant aux lacets (a_0) et (O).

422. Ces considérations permettent de trouver aisément les modes favorables. Nous associerons les racines par différence, et nous ferons le produit des $\frac{n+1}{2}$ quantités.

Pour $n = 5$, si l'on prend comme premier facteur $V - v_0$, la combinaison

$$(1) \qquad U = (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)$$

est la seule dans laquelle la différence des indices dans les derniers facteurs ne soit pas la même. Par le lacet (O), cette fonction acquiert les cinq valeurs

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3), \\ U_1 &= (V - v_1)(v_2 - v_0)(v_3 - v_4), \\ U_2 &= (V - v_2)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0), \\ U_3 &= (V - v_3)(v_4 - v_2)(v_0 - v_1), \\ U_4 &= (V - v_4)(v_0 - v_3)(v_1 - v_2). \end{aligned} \right.$$

D'après la loi de permutation écrite au n° **408**, le lacet (a_0) reproduit ces mêmes valeurs dans un autre ordre; on en conclut que la fonction U n'a que les cinq valeurs précédentes, et, par conséquent, qu'elle satisfait à une équation algébrique entre u et U, du cinquième degré en U.

Pour $n = 7$, il y a deux combinaisons favorables

$$(3) \qquad U = (V - v_0)(v_2 - v_3)(v_4 - v_6)(v_1 - v_5),$$

$$(4) \qquad U = (V - v_0)(v_2 - v_6)(v_5 - v_4)(v_1 - v_3).$$

On les obtient de la manière suivante : sur le lacet (a_0) la loi de permutation est $(V, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1, v_2)$. Prenons comme premier facteur $V - v_0$, et comme second $v_2 - v_\alpha$, par exemple $v_2 - v_3$; quand on décrit le lacet (a_0), le produit $(V - v_0)(v_2 - v_3)$ devient $(v_5 - v_0)(V - v_1)$: le premier produit complété, devant reproduire le second après le lacet (O) parcouru une fois, contiendra le facteur $v_4 - v_0$, qui donne

naissance à $v_3 - v_0$, et, par suite, le dernier facteur sera $v_1 - v_3$. Par le lacet (O), la fonction (3) acquiert sept valeurs; ces mêmes valeurs se reproduisent sur le lacet (a_0); on en conclut que la fonction U satisfait à une équation algébrique entre u et U, du septième degré en U. La fonction (4) jouit de la même propriété.

Pour $n = 11$, on a aussi deux combinaisons favorables

$$(5)\qquad U = (V - v_0)(v_{10} - v_5)(v_3 - v_6)(v_9 - v_7)(v_2 - v_1)(v_4 - v_8),$$

$$(6)\qquad U = (V - v_0)(v_{10} - v_9)(v_8 - v_5)(v_7 - v_3)(v_6 - v_1)(v_2 - v_4),$$

que l'on obtient de la même manière. Sur le lacet (a_0) la loi de permutation est $(V, v_1, v_6, v_4, v_3, v_9, v_2, v_8, v_7, v_5, v_{10})$. On prendra comme premier facteur $V - v_0$ et comme second $v_{10} - v_\alpha$. Pour $n = 13$, il n'y a pas de combinaison favorable.

423. De l'abaissement du degré de l'équation modulaire pour $n = 5$, M. Hermite a déduit une méthode de résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques (*Comptes rendus*, t. XVIII). Formons l'équation du cinquième degré en U. Les valeurs de U étant finies pour toutes les valeurs finies de u, le coefficient de U^5 est égal à l'unité. Pour $u = \infty$, les six valeurs de v sont infinies, l'une du degré 5, les autres du degré $\frac{1}{5}$ (n° 408); les cinq valeurs de U sont infinies et du degré $\frac{27}{5}$; la somme des ordres négatifs de la fonction U étant égale à 27, l'équation est du degré 27 par rapport à u (n° 135).

Pour les valeurs de u très-petites, les valeurs approchées de v sont

$$V = -2^{-2}u^5,\quad v_0 = 2^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{5}},\quad v_1 = v_0 e^{\frac{2\pi i}{5}},\quad v_2 = v_0 e^{2\frac{2\pi i}{5}},\quad v_3 = v_0 e^{3\frac{2\pi i}{5}},\quad v_4 = v_0 e^{4\frac{2\pi i}{5}}.$$

et, par conséquent, celles de U sont

$$(7)\quad U_0 = 2^{\frac{6}{5}}5^{\frac{1}{2}}u^{\frac{8}{5}},\quad U_1 = U_0 e^{\frac{6\pi i}{5}},\quad U_2 = U_0 e^{2\frac{6\pi i}{5}},\quad U_3 = U_0 e^{3\frac{6\pi i}{5}},\quad U_4 = U_0 e^{4\frac{6\pi i}{5}}.$$

Nous avons posé $\xi = \frac{v}{u^5}$; posons de même

$$\Phi = \frac{U}{u^{15}} = (\xi - \xi_0)(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3);$$

les coefficients de l'équation en ξ étant des polynômes entiers en u^8 (n° 401), ceux de l'équation en Φ jouiront de la même propriété; les valeurs de Φ ne devenant infinies que pour $u = 0$, cette équation est de la forme

$$u^{8\beta_0}\Phi^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \ldots)\Phi^{5-p} + (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + \ldots) = 0.$$

En remplaçant Φ par $\frac{U}{u^{15}}$ et multipliant par u^3, on obtient l'équation

$$u^{8(\beta_0-9)}U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8(\beta_p-9)+15p}(a_p + b_p u^8 + \ldots)U^{5-p} + u^3(a_5 + a_5 u^8 + \ldots) = 0.$$

Pour les valeurs très-petites de u, les valeurs de U étant très-petites du degré $\frac{3}{5}$, et formant un système circulaire, on a $\beta_0 = 9$, $a_5 = -2^6 5^{\frac{5}{2}}$, $8(\beta_p - 9) + 15p > 3$, et, par suite, $\beta_p \overline{\overline{>}} 10 - 2p$; nous prendrons $\beta_p = 10 - 2p$. L'équation cherchée est donc de la forme

$$(8)\quad U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8-p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16})U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + d_5 u^{24}) = 0.$$

Si l'on considère la fonction

$$(U) = [(V) - (v_0)][(v_1) - (v_4)][(v_2) - (v_3)],$$

relative à la variable $u_1 = \frac{1}{u}$, on a

$$(U) = \frac{-1}{V v_0 v_1 v_2 v_3 v_4}(V - v_2)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0) = \frac{U}{u^6},$$

puisque le produit des racines de l'équation modulaire (n° 411) est égal à $-u^6$. Ainsi l'équation (8) ne doit pas changer quand on y remplace u par $\frac{1}{u}$ et U par $\frac{U}{u^6}$. Mais, par cette substitution, l'équation devient

$$U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{7p-8}(a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})U^{5-p} + u^3(d_5 + c_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0;$$

on en conclut qu'elle ne contient pas de terme en U^4 et que l'on a

$$b_1 = c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad b_3 = a_3, \quad c_4 = a_4, \quad d_5 = a_5, \quad c_5 = b_5.$$

L'équation se réduit à

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & U^5 + a_2 u^6 U^3 + a_3 u^5 (1 + u^8) U^2 + u^4 (a_4 + b_4 u^8 + a_4 u^{16}) U \\ & \qquad + u^3 (a_5 + b_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $u = 1$, la racine v_0 de l'équation modulaire est égale à $+1$, et les cinq autres à -1 (n° 406); les cinq valeurs de U s'annulent; les polynômes en u, coefficients des diverses puissances de U dans l'équation (9), devant s'annuler pour $u = 1$, on en déduit $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -a_5$, ce qui réduit l'équation à la forme simple

$$(10) \qquad U^5 + a_4 u^4 (1 - u^8)^2 U + a_5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0.$$

Nous connaissons le coefficient a_5; il reste à déterminer le coefficient a_4; nous suivrons la marche qui a été indiquée au n° 411 pour le calcul de l'équation modulaire. A une valeur réelle, positive et très-petite de u, correspond une valeur de ρ de la forme $\rho = si$, s étant positive et très-grande et par conséquent une valeur de q réelle, positive et très-petite. En développant $\varphi(\rho)$ en série et se bornant aux deux premiers termes, on a

$$u = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} (1 - q), \quad v_0 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(1 - q^{\frac{1}{5}}\right),$$

$$v_1 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}}\right), \quad v_2 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}}\right),$$

$$v_3 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}}\right), \quad v_4 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}}\right),$$

$$v_1 - v_4 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5} q^{\frac{1}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right), \quad v_2 - v_3 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5} q^{\frac{1}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right),$$

$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right).$$

En substituant dans l'équation (10), divisant tous les termes par $q^{\frac{3}{8}}$, puis égalant à zéro le terme constant et le coefficient de $q^{\frac{1}{5}}$, on

trouve $a_5 = -2^6 5^{\frac{5}{2}}$, $a_4 = -2^4 5^3$. L'équation cherchée est donc

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1 - u^8)^2 U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0. \tag{11}$$

424. Si l'on pose $x = hU$, cette équation devient

$$x^5 - 2^4 5^3 h^4 u^4 (1 - u^8)^2 x - 2^6 5^{\frac{5}{2}} h^5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0. \tag{12}$$

On sait que M. Jerrard a ramené l'équation générale du cinquième degré à la forme

$$x^5 - Ax - B = 0. \tag{13}$$

Or on peut disposer des deux paramètres u et h que renferme l'équation (12), de manière à identifier les deux équations précédentes. Il suffit pour cela de poser

$$2^4 5^3 h^4 u^4 (1 - u^8)^2 = A, \quad 2^6 5^{\frac{5}{2}} h^5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = B,$$

d'où

$$h = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{B}{A} \frac{u}{1 + u^8}; \tag{14}$$

en substituant cette valeur de h dans l'équation

$$2^2 5^{\frac{3}{2}} h^2 u^2 (1 - u^8) = \sqrt{A},$$

on arrive à l'équation du second degré

$$\left(u^4 - \frac{1}{u^4}\right)^2 + \frac{5^{\frac{5}{2}} B^2}{4 A^2 \sqrt{A}} \left(u^4 - \frac{1}{u^4}\right) + 4 = 0. \tag{15}$$

De cette dernière équation, on déduira $u^4 - \frac{1}{u^4}$, et par conséquent u^4 ou k; on cherchera l'une des valeurs correspondantes de q ou de ρ; on en déduira les six valeurs de v, et par suite, à l'aide des formules (2), les cinq valeurs de U; en les multipliant par la quantité connue h, on aura enfin les racines de l'équation proposée (13).

425. On verrait de la même manière que, pour $n = 7$, l'équation en U, qui est du 52e degré en u, est de la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & U^7 + a_3 u^4(1 - u^8)U^4 + a_5 u^4(1 - u^8)^4 U^2 + a_6 u^8(1 - u^8)^4 U \\ & \qquad + a_7 u^4(1 - u^8)^4(1 - u^8 + u^{16}) = 0. \end{aligned}\right.$$

La considération du discriminant (n° **413**) sert à déterminer le dernier terme. On obtiendra les quatre coefficients qui restent dans l'équation en développant en série, comme précédemment, la fonction $\varphi(\rho)$, et poussant le développement jusqu'au cinquième terme, savoir :

$$u = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}(1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4), \quad v_0 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{4}{56}}\left(1 - q^{\frac{1}{7}} + 2q^{\frac{2}{7}} - 3q^{\frac{3}{7}} + 4q^{\frac{4}{7}}\right).$$

On trouve ainsi, pour la première combinaison,

$$U = i 2^2 7^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{14}}\left(1 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} q^{\frac{2}{7}} + q^{\frac{4}{7}}\right),$$

d'où

$$a_7 = i 2^{12} 7^{\frac{7}{2}}, \quad a_5 = 0, \quad a_3 = -i 2^4 7^{\frac{5}{2}} \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad a_6 = 2^8 7^4 \left[1 - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{1}\right)^2\right].$$

On déduit la seconde combinaison de la première, en remplaçant i par $-i$.

LIVRE IX.

THÉORÈME D'ABEL.

CHAPITRE PREMIER.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

426. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et entière, irréductible, et du degré m par rapport à y. A chaque valeur de x correspondent m valeurs de y. Lorsque la variable x part d'un point fixe x_0, y ayant une valeur initiale y_0, et décrit différents chemins qui aboutissent à un même point x, la fonction algébrique y acquiert m valeurs en ce point. Nous associerons à la variable x la valeur correspondante de y sur chaque courbe, et nous appellerons *point analytique* le système des valeurs de x et y. Nous dirons que deux courbes décrites par le point (x, y) se coupent, lorsqu'au point d'intersection des deux courbes géométriques qui figurent la variation de x la valeur de y est la même. Le point analytique décrit une courbe fermée, ou un *cycle* (n° **104**), lorsque la valeur de y redevient la même au point de départ.

On a donné le nom d'*intégrales abéliennes* aux intégrales définies

$$\int \varphi(x, y)\, dx, \tag{1}$$

dans lesquelles $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y. Ces intégrales rentrent dans la catégorie de celles que nous avons étudiées dans le Chapitre IV du troisième Livre ; car la quantité $u = \varphi(x, y)$ est elle-même une fonction algébrique de x, satisfaisant à une équation du degré m par rapport à u.

Nous avons démontré (n° 106) que, pour chaque valeur de x, l'intégrale acquiert m valeurs, augmentées chacune de multiples quelconques de certaines périodes. Nous nous proposons maintenant de rechercher les intégrales auxquelles on peut ramener toutes les autres, quand l'équation $F(x, y) = 0$ reste la même, et que la fraction rationnelle $\varphi(x, y)$ est quelconque.

Nous mettrons d'abord l'intégrale sous la forme adoptée par Abel. Concevons que l'on opère une substitution du premier degré

$$x = \frac{bx' + b'y' + b''}{ax' + a'y' + a''}, \quad y = \frac{cx' + c'y' + c''}{ax' + a'y' + a''};$$

l'équation proposée se transforme en une équation $f(x', y') = 0$, du même degré; désignons par m ce degré par rapport aux deux variables x' et y'. Si l'on pose

$$A = a'b'' - b'a'', \quad A' = a''b - b''a, \quad A'' = ab' - ba',$$

et si l'on rend l'équation homogène en y remplaçant x' et y' par $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$, et multipliant par z'^m, on a

$$dx = \frac{\left(A\frac{df}{dx'} + A'\frac{df}{dy'} + A''\frac{df}{dz'}\right)dx'}{(ax' + a'y' + a'')^2\frac{df}{dy'}}.$$

La fraction $\varphi(x, y)$ est le quotient de deux polynômes entiers M et N; appelons n le degré du dénominateur, n' celui du numérateur; après la substitution, on aura

$$\varphi(x, y) = \frac{M'}{N'(ax' + a'y' + a'')^{n'-n}},$$

M′ et N′ étant des polynômes entiers en x' et y', le premier du degré n', le second du degré n. Si l'on pose maintenant

$$\psi(x', y') = \frac{M'\left(A\frac{df}{dx'} + A'\frac{df}{dy'} + A''\frac{df}{dz'}\right)}{N'(ax' + a'y' + a'')^{n'-n+2}},$$

l'intégrale prend la forme

$$\int \psi(x', y') \frac{dx'}{\left(\frac{df}{dy'}\right)}.$$

Dans la nouvelle fraction rationnelle $\psi(x', y')$, le degré du numérateur surpasse de $m-3$ unités celui du dénominateur.

427. D'après cela, étant donnée l'équation $f(x, y) = 0$ du degré m par rapport à x et à y, nous considérerons l'intégrale

$$(2) \qquad \int \psi(x, y) \frac{dx}{f'_y},$$

dans laquelle $\psi(x, y)$ désigne le quotient de deux polynômes entiers M et N, dont le second est d'un degré quelconque n, le premier du degré $n+m-3$. La substitution du premier degré nous permet de supposer que l'équation renferme un terme en y^m et un en x^m; les m valeurs de y conservent alors des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de x, et deviennent infinies avec x; nous pouvons supposer aussi que les m valeurs du rapport $\frac{y}{x}$ restent finies et différentes, quand x devient infini; chaque branche de l'intégrale conserve alors une valeur finie au point $x=\infty$ sur la sphère, et reste holomorphe dans le voisinage de ce point; car la quantité $v = ux^2$ reste finie (n° 110).

On peut remplacer la fraction rationnelle $\frac{M}{N}$ par une autre dont le dénominateur ne renferme que la variable x. Soient, en effet,

$$f = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$N = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n,$$

les coefficients a et b étant des polynômes entiers en x, dont les degrés sont marqués par les indices. On sait que, si l'on élimine y entre les deux équations $f=0$, $N=0$, le premier membre de l'équation résul-

tante $X = 0$ est le déterminant

$$X = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme entier en x du degré mn. Si l'on multiplie les éléments de la première colonne verticale par y^{m+n-1} ceux de la seconde par $y^{m+n-2}, \dots$, ceux de l'avant-dernière par y, et qu'après les avoir ainsi multipliés on les ajoute à la dernière, on remplace cette dernière colonne par

$$y^{n-1}f,\ y^{n-2}f, \dots, f,\quad y^{m-1}N,\ y^{m-2}N, \dots,\ N,$$

sans changer la valeur du déterminant; mais alors ce déterminant, ordonné par rapport aux éléments de la dernière colonne, se compose de deux parties, contenant en facteur, l'une f, l'autre N, et l'on a

$$X = Af + BN. \tag{3}$$

Les polynômes A et B sont les déterminants que l'on obtient en remplaçant dans le déterminant X la dernière colonne par l'une ou l'autre des deux suites

$$y^{n-1},\quad y^{n-2}, \dots,\quad 1,\quad 0, \dots,\quad 0,\quad 0,$$
$$0, \dots,\quad 0, \dots,\quad 0,\quad y^{m-1},\quad y^{m-2}, \dots,\quad 1;$$

ordonnés par rapport à y, ils sont de la forme

$$A = A_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \dots + A_{n-1},$$
$$B = B_0 y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + \dots + B_{m-1}.$$

Les coefficients A_h et B_h, qui sont, au signe près, les sous-déterminants relatifs aux éléments de la dernière colonne, sont des polynômes entiers en x du degré $(m-1)(n-1) + h$, et, par conséquent, les degrés des

polynômes A et B sont respectivement $mn - m$ et $mn - n$ par rapport aux deux variables x et y.

Cela posé, si l'on multiplie par B les deux termes de la fraction $\frac{M}{N}$, on aura, en vertu de la relation (3), et en tenant compte de l'équation $f = 0$,

$$\frac{M}{N} = \frac{BM}{BN} = \frac{BM}{X}.$$

Le dénominateur de la nouvelle fraction ne contient plus que la variable x. Le numérateur est un polynôme entier en x et y, du degré $mn + m - 3$ par rapport à ces deux variables, mais seulement du degré $n + 2m - 4$ par rapport à y; nous le représenterons par

$$BM = X_{(m-1)(n-1)} y^{2m+n-4} + X_{(m-1)(n-1)+1} y^{2m+n-5} + \ldots + X_{mn+m-3},$$

en indiquant par des indices les degrés des coefficients.

428. Il est clair que l'équation $f = 0$ permet de réduire ce polynôme au degré $m - 1$ par rapport à y, sans changer le degré total; soit

$$BM = X'_{mn-2} y^{m-1} + X'_{mn-1} y^{m-2} + \ldots + X'_{mn+m-3}.$$

On peut même le réduire au degré $m - 2$. On a, en effet,

$$f'_y = m a_0 y^{m-1} + (m-1) a_1 y^{m-2} + \ldots,$$

$$BM - \frac{X'_{mn-2}}{m a_0} f'_y = X''_{mn-1} y^{m-2} + X''_{mn} y^{m-3} + \ldots + X''_{mn+m-3} = H,$$

et, par suite,

$$\int \frac{BM}{X} \frac{dx}{f'_y} = \int \frac{X'_{mn-2}}{m a_0 X} dx + \int \frac{H}{X} \frac{dx}{f'_y}.$$

En faisant abstraction de la première intégrale, qui s'exprime par une quantité algébrique et le logarithme d'une quantité algébrique, on a à considérer l'intégrale

$$(4) \qquad \int \frac{H}{X} \frac{dx}{f'_y},$$

dans laquelle le dénominateur X est un polynôme entier en x du degré mn, et le numérateur H un polynôme entier en x et y du degré $mn+m-3$ par rapport à ces deux variables, mais seulement du degré $m-2$ par rapport à y.

Si l'on divise par X les coefficients X'_{mn}, X'_{mn+1},... du polynôme H, à partir du second, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on aura des quotients $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-3}$ de degrés marqués par les indices, et des restes $R_0, R_1, \ldots, R_{m-3}$ du degré $mn-1$. En posant

$$Q = c_0 y^{m-3} + c_1 y^{m-4} + \ldots + c_{m-3},$$

$$R = X''_{mn-1} y^{m-2} + R_0 y^{m-3} + R_1 y^{m-4} + \ldots + R_{m-3},$$

on a ainsi

$$\frac{H}{X} = Q + \frac{R}{X},$$

et l'intégrale (4) se partage en deux parties

$$(5) \qquad \int \frac{Q\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{R}{X}\frac{dx}{f'_y}.$$

Chacune des fractions rationnelles $\frac{X''_{mn-1}}{X}$, $\frac{R_0}{X}$,... se décompose en une somme de fractions simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^q}$, A étant une constante et a une racine du dénominateur. La seconde intégrale se décompose donc en intégrales telles que

$$(6) \qquad \int \frac{G\,dx}{(x-a)^q f'_y},$$

G étant un polynôme entier en y, indépendant de x, et du degré $m-2$.

Intégrales abéliennes de première et de seconde espèce.

429. Considérons la première des intégrales (5), savoir

$$(7) \qquad V = \int \frac{Q\,dx}{f'_y}.$$

Le polynôme Q, du degré $m-3$ en x et y, renferme $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$

coefficients; on peut donc ramener toutes les intégrales (7) à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ intégrales particulières de cette sorte. Parmi ces intégrales, il en est qui conservent une valeur finie sur toute la sphère; ce sont celles-là que l'on appelle *intégrales de première espèce*. D'après ce que nous avons dit au n° 427, les m valeurs de y restent finies pour toutes les valeurs finies de x, et le point $x=\infty$ est un point ordinaire pour la fonction V; il suffit donc d'examiner ce qui a lieu quand $f'_y = 0$, c'est-à-dire aux points où plusieurs racines de l'équation $f=0$ deviennent égales entre elles. Soit (x_1, y_1) un point où n racines de l'équation $f=0$ sont égales à y_1; posons $x = x_1 + x'$, $y = y_1 + y'$. Dans le cas particulier où la dérivée f'_x n'est pas nulle, on a (n° 33)

$$f = (Ax' + By'^n) + \ldots;$$

les n racines égales forment un système circulaire et sont représentées par la série

$$y' = v_0 x'^{\frac{1}{n}} + v_1 x'^{\frac{2}{n}} + \ldots;$$

on en déduit

$$f'_y = nBy'^{n-1} + \ldots = v'_0 x'^{1-\frac{1}{n}} + \ldots.$$

La fonction $u = \frac{Q}{f'_y}$, placée sous le signe somme, étant une quantité infiniment grande d'un degré inférieur à l'unité, l'intégrale conserve une valeur finie, mais elle acquiert n valeurs différentes, quand la variable tourne autour du point critique (n° 107).

En général, les n racines égales se partagent en plusieurs systèmes circulaires représentés chacun par une série de la forme

$$y' = v_0 x'^{\frac{q}{p}} + v_1 x'^{\frac{q+1}{p}} + \ldots.$$

Si $Ay'^{\alpha} x'^{\beta}$ est le premier terme du premier groupe dans l'équation (n° 34), f est, par rapport à x', un infiniment petit du degré $\alpha \frac{q}{p} + \beta$, et, par conséquent, f'_y un infiniment petit d'un degré $(\alpha - 1)\frac{q}{p} + \beta$, égal ou supérieur à l'unité. Supposons que dans le numérateur $Q = Q_1 + \Sigma A' y'^{\alpha'} x'^{\beta'}$ on ait remplacé y' par sa valeur; pour que l'intégrale reste finie, il fau-

dra égaler à zéro le terme constant Q_1 et les coefficients de tous les termes dont les degrés sont inférieurs ou égaux à $(\alpha - 1)\frac{q}{p} + (\beta - 1)$. Chaque point double à tangentes distinctes donne la seule condition $Q_1 = 0$. On obtiendra ainsi un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients du polynôme Q; si m' est le nombre des relations distinctes, il restera $m_1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - m'$ coefficients arbitraires; ce sera le nombre des intégrales de première espèce. Pour toutes ces intégrales, les points critiques sont ceux de la fonction algébrique y, définie par l'équation $f(x,y) = 0$; les mêmes cycles donneront leurs périodes; nous avons vu (nos **111** et **242**) que le nombre des périodes distinctes, pour chacune d'elles, est au plus égal à $\Sigma(p-1) - 2(m-1)$.

Outre ces intégrales toujours finies, nous en prendrons m' autres, que nous choisirons de manière que chacune d'elles satisfasse aux m' équations de condition, excepté une; ce seront les *intégrales de seconde espèce*. La première satisfait aux m' conditions, excepté la première; la seconde aux m' conditions, excepté la seconde, et ainsi de suite. Chacune des intégrales de seconde espèce ne devient infinie qu'en un point sur la sphère.

Intégrales abéliennes de troisième espèce.

430. Dans l'intégrale (6), la lettre a désigne un paramètre arbitraire, et q un nombre entier quelconque, cette intégrale étant la dérivée d'ordre q par rapport à ce paramètre de l'intégrale

$$(8) \qquad \int \frac{G\,dx}{(x-a)f'_y};$$

on peut se borner à étudier cette dernière. Le polynôme G, indépendant de x, et du degré $m-2$ en y, contient $m-1$ coefficients; on a donc $m-1$ intégrales de la forme (8). Mais nous considérerons le cas plus général où G est un polynôme entier en x et y, du degré $m-2$ par rapport à ces deux variables. Par une substitution entière et du premier degré, analogue à une transformation de coordonnées, nous mettrons la droite $x - a = 0$ sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; l'inté-

grale devient alors

$$V = \int \frac{G\,dx}{(\alpha x + \beta y + \gamma) f'_y}. \tag{9}$$

Nous assujettirons d'abord le polynôme G à satisfaire aux conditions nécessaires pour que l'intégrale conserve une valeur finie aux points critiques relatifs à la fonction algébrique y; il restera un certain nombre de coefficients arbitraires. La droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ coupe la courbe $f = 0$ en m points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$; nous assujettirons en outre la courbe $G = 0$, qui est du degré $m - 2$, à passer par $m - 2$ de ces points, par exemple par les $m - 2$ derniers; de cette manière, la fonction V ne deviendra infinie qu'aux deux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, qui sont des pôles simples de la fonction u placée sous le signe somme, et des points critiques logarithmiques de l'intégrale (n° **108**). Telles sont les *intégrales de troisième espèce*.

On peut ramener toutes les intégrales (9) à $m - 1$ intégrales particulières de troisième espèce. Soient en effet $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots,$ $G_{m-1} = 0$ des courbes particulières du degré $m - 2$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, et passant par tous les points d'intersection de la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et de la courbe $f = 0$, excepté deux, savoir : la première, par tous les points, excepté le premier et le dernier; la seconde, par tous les points, excepté le second et le dernier, et ainsi de suite. Si G est un polynôme quelconque du degré $m - 2$, on peut déterminer les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, de manière que la courbe

$$G - A_1 G_1 - A_2 G_2 - \ldots - A_{m-1} G_{m-1} = 0$$

passe par tous les points d'intersection, excepté le dernier; il suffit pour cela de prendre

$$A_1 = \left(\frac{G}{G_1}\right)_{x_1}, \quad A_2 = \left(\frac{G}{G_2}\right)_{x_2}, \ldots, \quad A_{m-1} = \left(\frac{G}{G_{m-1}}\right)_{x_{m-1}};$$

le premier membre de l'équation est alors décomposable en facteurs, et l'on a

$$G - A_1 G_1 - A_2 G_2 - \ldots - A_{m-1} G_{m-1} = (\alpha x + \beta y + \gamma) H,$$

H étant un polynôme entier en x et y, du degré $m-3$. Si l'on appelle $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ les $m-1$ intégrales de troisième espèce, qui correspondent aux polynômes $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$, on en déduit

$$V = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_{m-1} V_{m-1} + \int \frac{H\,dx}{f'_y}.$$

Toutes les intégrales (9) se ramènent donc à $m-1$ intégrales de troisième espèce, et à des intégrales de première et de seconde espèce.

431. Considérons une intégrale de troisième espèce (9), telle que la courbe $G = 0$ passe par tous les points d'intersection de la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec la courbe $f = 0$, excepté les deux premiers (x_1, y_1), (x_2, y_2). Afin de rendre les polynômes homogènes, concevons que l'on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; les coordonnées d'un point quelconque de cette droite pourront être représentées par

$$x = x_1 + t x_2, \quad y = y_1 + t y_2, \quad z = z_1 + t z_2,$$

à l'aide d'une variable t. Les points d'intersection de la droite et de la courbe $f = 0$ sont donnés par l'équation

$$f(x_1 + t x_2,\ y_1 + t y_2,\ z_1 + t z_2) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots + u_m t^m = 0,$$

qui se réduit à

$$u_1 + u_2 t + \ldots + u_{m-1} t^{m-2} = 0,$$

puisque les coefficients u_0 et u_m sont nuls. Les points d'intersection de la droite avec la courbe $G = 0$ sont de même donnés par l'équation

$$G = v_1 + v_2 t + \ldots + v_{m-1} t^{m-2} = 0.$$

Il faut que ces deux équations admettent les mêmes racines, et, par conséquent, que leurs coefficients soient proportionnels; en multipliant G par une constante convenable, on peut faire en sorte que ces coefficients soient égaux. On aura alors

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_{m-1}}{u_{m-1}} = 1,$$

et, par suite,

$$G_{z_1} = v_1 = u_1 = x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = (x_2 - x_1) f'_{x_1} + (y_2 - y_1) f'_{y_1},$$
$$G_{z_2} = v_{m-1} = u_{m-1} = x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = (x_1 - x_2) f'_{x_2} + (y_1 - y_2) f'_{y_2}.$$

Nous mettrons l'équation de la droite sous la forme

$$\alpha x + \beta x + \gamma = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

à l'aide d'un déterminant, que nous désignerons par le symbole $[x_1, x_2]$. En se bornant à la partie principale, on a, dans le voisinage du point (x_1, y_1),

$$[x_1, x_2] = (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = \frac{(x_1 - x_2) f'_{x_1} + (y_1 - y_2) f'_{y_1}}{f'_{y_1}} (x - x_1),$$
$$V = -\int \frac{dx}{x - x_1} = -\log(x - x_1),$$

et, dans le voisinage du point (x_2, y_2),

$$[x_1, x_2] = (x - x_2)(y_1 - y_2) - (y - y_2)(x_1 - x_2) = \frac{(x_1 - x_2) f'_{x_2} + (y_1 - y_2) f'_{y_2}}{f'_{y_2}} (x - x_2),$$
$$V = \int \frac{dx}{x - x_2} = \log(x - x_2).$$

L'intégrale éprouve un accroissement $-2\pi i$ ou $+2\pi i$, quand le point mobile (x, y) tourne autour du premier ou du second point, dans le sens positif.

Intégrales ultra-elliptiques.

432. On appelle ainsi les intégrales abéliennes que l'on obtient quand l'équation proposée est de la forme

$$(10) \qquad y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m),$$

le second membre étant un polynôme entier en x, du degré $2n$ ou

$2n-1$, et le second cas se ramène au premier. La réduction de ces intégrales est facile. On a, comme au n° 270,

$$\varphi(x,y) = \frac{M+M'y}{N+N'y} = \frac{(M+M'y)(N-N'y)}{N^2-N'^2y^2} = \frac{P+P'y}{X},$$

$$\int \varphi(x,y)\,dx = \int \frac{P}{X}\,dx + \int \frac{P'y}{X}\,dx.$$

Faisant abstraction de la première partie, considérons la seconde, qui est de la forme

$$\int \frac{H}{X}\frac{dx}{y},$$

H et X étant des polynômes entiers en x. En divisant le premier par le second, appelant Q le quotient et R le reste d'un degré inférieur à celui de X, on arrive aux deux intégrales

$$\int \frac{Q\,dx}{y}, \quad \int \frac{R}{X}\frac{dx}{y}.$$

La première est une somme d'intégrales de la forme

(11) $$\int \frac{x^m dx}{y}.$$

La seconde se décompose en intégrales de la forme

(12) $$\int \frac{dx}{(x-a)^q y}.$$

433. Considérons les intégrales (11); on a

$$D_x(x^m y) = mx^{m-1}y + x^m D_x y = \frac{1}{y}\left[mx^{m-1}y^2 + \frac{x^m}{2}D_x(y^2)\right];$$

la quantité placée entre parenthèses est un polynôme entier en x du degré $2n+m-1$, que nous représenterons par

$$A_0 x^{2n+m-1} + A_1 x^{2n+m-2} + \ldots + A_{2n+m-1};$$

on en déduit, par l'intégration

$$x^m y = A_0 \int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{y} + A_1 \int \frac{x^{2n+m-2}\,dx}{y} + \ldots + A_{2n+m-1} \int \frac{dx}{y},$$

et la première intégrale s'exprime à l'aide des autres. On ramène ainsi toutes les intégrales (11) à celles dans lesquelles l'exposant est plus petit que $2n - 1$, c'est-à-dire aux $2n - 1$ intégrales

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{y}, \ldots, \quad \int \frac{x^{2n-2}\,dx}{y}.$$

Pour que l'intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, il est nécessaire et il suffit que l'exposant soit inférieur ou égal à $n - 2$; il y a donc $n - 1$ intégrales ultra-elliptiques de première espèce, savoir :

$$(14) \qquad \int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{y}, \ldots, \quad \int \frac{x^{n-2}\,dx}{y}.$$

D'après ce que nous avons dit au n° **113**, le nombre des périodes pour chacune d'elles est $2n - 2$; nous remarquons qu'il est double de celui des intégrales de première espèce. Les n intégrales suivantes sont de seconde espèce.

Les intégrales (12) sont les dérivées par rapport au paramètre a de l'intégrale de troisième espèce

$$(15) \qquad \int \frac{dx}{(x-a)y}.$$

Cette intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, excepté aux deux points d'intersection de la droite $x = a$ avec la courbe (10). Soit b l'une des valeurs de y pour $x = a$; les deux points critiques sont (a, b), $(a, -b)$; la partie principale de l'intégrale

$$(16) \qquad \int \frac{b\,dx}{(x-a)y}$$

est $\log(x-a)$ dans le voisinage du premier point, et $-\log(x-a)$ dans le voisinage du second point.

CHAPITRE II.

RELATION ENTRE LES PÉRIODES DE DEUX INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Relation entre les périodes de deux intégrales abéliennes de première espèce.

434. Appelons U et V deux intégrales de première espèce, relatives à une même équation algébrique $f(x,y) = 0$ du degré m. Le point O′ sur la sphère étant un point ordinaire, l'intégrale $\int U\,dV$, prise sur l'un quelconque des circuits, U et V étant les valeurs des intégrales comptées à partir de l'origine de ce circuit, est nulle (nº **111**). L'ensemble des m circuits donne donc l'équation

$$\sum \int U\,dV = 0. \qquad (1)$$

Considérons les p lacets binaires de première espèce

$$(a)^{g_1}_{g_0},\quad (a)^{g_2}_{g_1},\ldots,\quad (a)^{g_0}_{g_{p-1}},$$

qui se rapportent à un système circulaire de p racines se permutant autour du point critique a, et les p circuits

$$(C)^{\alpha_0}_{\alpha_0},\quad (C)^{\alpha_1}_{\alpha_1},\ldots,\quad (C)^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-1}},$$

dans lesquels entrent respectivement ces lacets (nº **112**). Cherchons la partie qui, dans le premier membre de l'équation (1), correspond à ces lacets (Oa). Sur chaque circuit, un élément mm' de la droite Oa est parcouru deux fois, dans des sens contraires. Nous désignerons par dV_{g_0}, dV_{g_1},... les valeurs de dV sur l'élément mm', quand la variable x décrit la droite Oa, la racine y ayant en O l'une des valeurs initiales

$y_{g_0}, y_{g_1}, \ldots$. Sur le circuit $(C)_{\alpha_0}^{\alpha_0}$, quand on arrive à l'entrée du lacet $(a)_{g_0}^{g_1}$, l'intégrale U a acquis la valeur $U_{\alpha_0}^{g_0}$; sur la droite Om elle augmente ensuite de la quantité $U_{g_0}^{m}$, de sorte qu'elle a en m la valeur $U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m}$, et l'élément mm' donne l'élément différentiel $(U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0}$. Quand la variable x, après avoir décrit un petit cercle autour du point critique a, dans le sens positif, revient en m, la fonction U a une autre valeur U′; en achevant le circuit, on aurait

$$U' + U_{m}^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0} = 0, \quad \text{d'où} \quad U' = -U_{g_1}^{\alpha_0} + U_{g_1}^{m}.$$

dV ayant sur mm' la valeur $-dV_{g_1}$, on a le second élément différentiel $(U_{g_1}^{\alpha_0} - U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1}$. Ainsi le circuit $(C)_{\alpha_0}^{\alpha_0}$ donne, pour l'élément mm' de la droite Oa, les deux éléments différentiels

$$(U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0} + (U_{g_0}^{\alpha_0} - U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1};$$

le circuit $(C)_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ donne, pour le même élément mm',

$$(U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1} + (U_{g_2}^{\alpha_1} - U_{g_2}^{m})\,dV_{g_2},$$

et ainsi de suite; enfin le circuit $(C)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}$ donne

$$(U_{\alpha_{p-1}}^{g_{p-1}} + U_{g_{p-1}}^{m})\,dV_{g_{p-1}} + (U_{g_0}^{\alpha_{p-1}} - U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0}.$$

En ajoutant ces résultats, on obtient la partie qui dans la somme (1) se rapporte à l'élément mm', savoir :

$$(2) \quad (U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{\alpha_{p-1}})\,dV_{g_0} + (U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0})\,dV_{g_1} + \ldots + (U_{\alpha_{p-1}}^{g_{p-1}} + U_{g_{p-1}}^{\alpha_{p-2}})\,dV_{g_{p-1}}.$$

Posons

$$U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0} = A_{\alpha_1}^{\alpha_0}, \quad U_{\alpha_2}^{g_2} + U_{g_2}^{\alpha_1} = A_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \ldots, \quad U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{\alpha_{p-1}} = A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}},$$

et remarquons que ces quantités sont les valeurs de l'intégrale U, relatives aux lacets de seconde espèce $(a')_{\alpha_0}^{\alpha_1}, (a')_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \ldots, (a')_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0}$, décrits dans le sens négatif (n° 112); la quantité précédente se réduit à

$$(3) \quad A_{\alpha_1}^{\alpha_0}\,dV_{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1}\,dV_{g_2} + \ldots + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}}\,dV_{g_0}.$$

Il faut considérer maintenant les éléments successifs de la droite Oa,

c'est-à-dire intégrer de O à a. Si l'on appelle h_{g_0}, $h_{g_1}, \ldots$ les valeurs de l'intégrale V, relatives à la droite Oa, quand la racine y a en O l'une des valeurs initiales y_{g_0}, $y_{g_1}, \ldots$, on obtient la quantité

$$(4) \qquad A_{\alpha_1}^{\alpha_0} h_{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1} h_{g_2} + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} h_{g_{p-1}} + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}} h_{g_0}.$$

La somme des valeurs de l'intégrale U, relatives aux p lacets binaires de seconde espèce étant nulle, on a

$$A_{\alpha_1}^{\alpha_0} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1} + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}} = 0,$$

et la quantité (4) devient

$$(5) \qquad -A_{\alpha_1}^{\alpha_0}(h_{g_0} - h_{g_1}) - A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(h_{g_0} - h_{g_2}) - \ldots - A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(h_{g_0} - h_{g_{p-1}}).$$

Nous désignerons par $a_{g_0}^{g_1}$, $a_{g_1}^{g_2}, \ldots$, $a_{g_{p-1}}^{g_0}$ les valeurs de l'intégrale U, relatives aux p lacets binaires de première espèce, et par $b_{g_0}^{g_1}$, $b_{g_1}^{g_2}, \ldots$, $b_{g_{p-1}}^{g_0}$ celles de l'intégrale V, relatives aux mêmes lacets, décrits dans le sens positif; comme on a

$$\begin{aligned}
h_{g_0} - h_{g_1} &= b_{g_0}^{g_1}, \\
h_{g_0} - h_{g_2} &= (h_{g_0} - h_{g_1}) + (h_{g_1} - h_{g_2}) = b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
h_{g_0} - h_{g_{p-1}} &= (h_{g_0} - h_{g_1}) + (h_{g_1} - h_{g_2}) + \ldots + (h_{g_{p-2}} - h_{g_{p-1}}) = b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}},
\end{aligned}$$

l'expression (5) se met sous la forme

$$(6) \qquad -A_{\alpha_1}^{\alpha_0} b_{g_0}^{g_1} - A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}) - \ldots - A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}).$$

Telle est la partie qui, dans la somme (1), correspond à un système circulaire de racines. Chaque système circulaire donnant une quantité analogue, on aura l'équation

$$(7) \quad -\Sigma\left[A_{\alpha_1}^{\alpha_0} b_{g_0}^{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}) + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}})\right] = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les systèmes circulaires de racines.

Cette équation peut être mise sous une autre forme. En intégrant par parties et remarquant que les valeurs des intégrales U et V sur

chaque circuit sont nulles, on a identiquement

$$(8)\qquad \Sigma\int \mathrm{U}\,d\mathrm{V} = -\Sigma\int \mathrm{V}\,d\mathrm{U}.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_0}$, $\mathrm{B}_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \ldots$, $\mathrm{B}_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}}$ les valeurs de l'intégrale V relatives aux lacets de seconde espèce, décrits dans le sens négatif, on obtiendra l'équation (7) sous la forme

$$(9)\quad \Sigma\left[\mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_0} a_{g_0}^{g_1} + \mathrm{B}_{\alpha_2}^{\alpha_1}\left(a_{g_0}^{g_1} + a_{g_1}^{g_2}\right) + \ldots + \mathrm{B}_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}}\left(a_{g_0}^{g_1} + a_{g_1}^{g_2} + \ldots + a_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}\right)\right] = 0.$$

435. Nous allons faire voir que l'on peut transformer cette équation, de manière qu'elle ne renferme plus que les périodes de l'une et l'autre intégrales. Après avoir choisi un système de lacets fondamentaux de première espèce, appelons $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots$ les valeurs des intégrales U et V, relatives aux lignes fermées composées uniquement de lacets fondamentaux et conduisant de la racine y_0 à chacune des autres $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. A chaque lacet binaire de première espèce correspond un cycle simple; nous désignerons par $\mathcal{A}_{g_0}^{g_1}$ et $\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1}$ les valeurs des intégrales U et V, relatives au cycle simple dans lequel entre le lacet binaire $(a)_{g_0}^{g_1}$. Ces intégrales sont nulles, lorsque le lacet binaire est l'un des lacets fondamentaux; dans le cas contraire, ce sont des périodes de l'une et de l'autre intégrales. Comme on a $\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} = \mathrm{V}_{g_0} + b_{g_0}^{g_1} - \mathrm{V}_{g_1}$, l'équation (7) devient

$$-\Sigma\left[\mathrm{A}_{\alpha_1}^{\alpha_0}\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}^{\alpha_1}\left(\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2}\right) + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}\left(\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2} + \ldots + \mathfrak{B}_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}\right)\right]$$
$$-\Sigma\left(\mathrm{A}_{\alpha_1}^{\alpha_0}\mathrm{V}_{g_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}^{\alpha_1}\mathrm{V}_{g_2} + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}\mathrm{V}_{g_{p-1}} + \mathrm{A}_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}}\mathrm{V}_{g_0}\right) = 0.$$

La quantité V_g se trouve dans les parties relatives à différents systèmes circulaires, dans toutes celles où un lacet binaire de première espèce permute la racine déterminée y_g en une autre; mais nous avons vu (n° **112**) qu'aux lacets de première espèce, qui permutent la racine y_g en une autre, correspondent les lacets binaires de seconde espèce, qui entrent dans le circuit de seconde espèce $(\mathrm{C}')_g^g$; la somme des quantités A, par laquelle est multiplié V_g, est donc nulle. La seconde partie étant identiquement nulle, l'équation précédente se réduit à sa première partie, c'est-à-dire à

$$(10)\quad \Sigma\left[a'^{\alpha_1}_{\alpha_0}\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + a'^{\alpha_2}_{\alpha_1}\left(\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2}\right) + \ldots + a'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}}\left(\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2} + \ldots + \mathfrak{B}_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}\right)\right] = 0.$$

Considérons maintenant les cycles formés chacun de lacets fondamentaux et d'un lacet de seconde espèce; on a, comme précédemment, $\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0} = U_{\alpha_0} + a'^{\alpha_1}_{\alpha_0} - U_{\alpha_1}$, et l'équation précédente devient

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\left[\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0}\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{A}'^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}) + \ldots + \mathcal{A}'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_{p-1}}_{g_{p-2}})\right] \\ &\qquad - \Sigma\left(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0}U_{\alpha_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}U_{\alpha_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_0}_{g_{p-1}}U_{\alpha_{p-1}}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La quantité U_α est multipliée par toutes les quantités $\mathcal{B}$, relatives aux cycles simples qui se rapportent aux lacets de première espèce correspondant aux lacets de seconde espèce qui permutent la racine y_α en une autre; mais ces lacets de première espèce forment le circuit de première espèce $(C)^{\alpha}_{\alpha}$. Ce circuit pouvant être regardé comme la réunion des cycles simples, la somme des quantités b par laquelle est multipliée U_α est nulle. Ainsi la seconde partie est encore identiquement nulle, et l'équation (11) se réduit à

$$(12)\ \Sigma\left[\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0}\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{A}'^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}) + \ldots + \mathcal{A}'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_{p-1}}_{g_{p-2}})\right] = 0;$$

elle est de la forme

$$(13)\qquad \Sigma\,\omega\omega' = 0,$$

ω et ω' étant des périodes de l'une et l'autre intégrales.

Relation entre les périodes d'une intégrale de première espèce et d'une de troisième espèce.

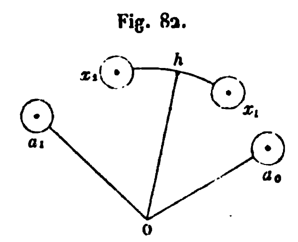
436. Soient (*fig.* 82)

$$U = \int \frac{Q\,dx}{f'_y}, \quad V = \int \frac{G\,dx}{[x_1, x_2]f'_y}$$

ces deux intégrales. Nous supposerons que l'on puisse joindre les deux points logarithmiques (x_1, y_1), (x_2, y_2) par une ligne qui ne coupe aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques $a_0, a_1, \ldots$. Dans ce cas, nous formerons un nouveau lacet avec cette ligne, deux petits cercles décrits autour des points logarithmiques, et une ligne Oh

allant de l'origine à un point de la ligne $x_1 x_2$. Dans le cas contraire, on introduirait deux lacets nouveaux unissant l'origine à chacun des points logarithmiques. Chaque circuit enveloppe tous les lacets. Les valeurs des deux intégrales étant nulles sur chaque circuit, l'équation (1) subsiste. Le lacet $(x_1 x_2)$ n'entre effectivement que dans un circuit; quand la variable x décrit ce lacet, l'intégrale V acquiert sur

Fig. 82.



les petits cercles x_1 et x_2 les accroissements $-2\pi i$ et $+2\pi i$, et, par conséquent, reprend à la fin du lacet la valeur qu'elle avait à l'entrée; ce lacet ne modifie donc en rien les parties de la somme qui se rapportent aux autres lacets. Il suffit d'y ajouter la partie fournie par ce nouveau lacet; les lignes Oh et $x_1 x_2$, étant parcourues deux fois avec des valeurs de UdV égales et de signes contraires, ne donnent rien dans la somme; il reste à considérer les deux petits cercles x_1 et x_2; le premier donne $-2\pi i U_{x_1}$, le second $+2\pi i U_{x_2}$, ensemble $2\pi i(U_{x_2} - U_{x_1})$, ou $2\pi i \int_{x_1}^{x_2} dU$, l'intégrale étant prise le long de la ligne $x_1 x_2$. On a donc l'équation

$$(14) \qquad \sum \omega\omega' + 2\pi i \int_{x_1}^{x_2} dU = 0.$$

Relation entre les périodes de deux intégrales de troisième espèce.

437. Soient

$$U = \int \frac{G\,dx}{[x_1, x_2] f'_y}, \quad V = \int \frac{G'\,dx}{[x'_1, x'_2] f'_y}$$

ces deux intégrales. Il faut considérer deux nouveaux lacets $(x_1 x_2)$, $(x'_1 x'_2)$ unissant, l'un les deux points logarithmiques de la première

intégrale, l'autre ceux de la seconde. Nous supposerons que les deux lignes x_1x_2, $x'_1x'_2$ ne coupent pas les lacets relatifs aux points critiques et ne se coupent pas entre elles.

L'équation (1) subsiste encore. Les nouveaux lacets ne modifient pas la partie qui se rapporte aux premiers lacets. D'après le raisonnement du numéro précédent, le lacet $(x'_1x'_2)$ donne $2\pi i\int_{x'_1}^{x'_2} dU$; la seconde forme de l'équation (8) montre que le lacet (x_1x_2) donne de même $-2\pi i\int_{x_1}^{x_2} dV$. On a donc l'équation

$$(15)\qquad \sum \omega\omega' + 2\pi i\int_{x'_1}^{x'_2} dU - 2\pi i\int_{x_1}^{x_2} dV = 0.$$

Application aux intégrales elliptiques.

438. Considérons deux intégrales elliptiques

$$U = \int_0^x \frac{dx}{y},\quad V = \int_0^x \frac{x^2dx}{y},\quad y = \Delta x,$$

l'une de première espèce, l'autre de seconde espèce (nº 273). Supposons que les lacets relatifs aux quatre points critiques a_0, a_1, a_2, a_3, qui correspondent aux valeurs $+1$, $\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ de la variable x, se succèdent dans l'ordre positif, et que le rayon Ol du circuit passe entre les points a_0 et a_3. Sur les deux circuits, la valeur initiale de y étant ± 1, les fonctions U et V ont au même point des valeurs égales et de signes contraires, et, par conséquent, l'intégrale $\int U dV$ a la même valeur. Elle devient infinie avec x; car, si l'on pose $x = \frac{1}{x'}$, et si l'on développe en série suivant les puissances croissantes de x', on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} &= \pm\frac{x'^2}{k}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots),\\
\frac{dU}{dx'} &= \mp\frac{1}{k}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots),\\
\frac{dV}{dx'} &= \mp\frac{1}{kx'^2}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots);
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$U = \mp \frac{1}{k}\left(C + x' + \frac{\alpha x'^3}{3} + \ldots\right),$$

$$U\frac{dV}{dx'} = \frac{1}{k^2 x'^2}(C + x' + \alpha' x'^2 + \beta' x'^3 + \ldots).$$

Le point O′ sur la sphère est pôle de cette dernière fonction. L'intégrale relative à chaque circuit, décrit dans le sens positif, est $-\frac{2\pi i}{k^2}$, ce qui fait pour les deux circuits $-\frac{4\pi i}{k^2}$; tel est, dans ce cas, le second membre de l'équation (1). Chaque lacet ne fournit qu'un seul terme, et le premier membre, sous la forme (7), est égal à

$$(a_1 - a_2 + a_3)b_0 + (-a_0 + a_2 - a_3)b_1 + (a_0 - a_1 + a_3)b_2 + (-a_0 + a_1 - a_2)b_3,$$

quantité qui se réduit à $-2(a_0 b_1 - a_1 b_0)$ et par suite à $-2(\omega\omega'_1 - \omega'\omega_1)$; on retrouve ainsi la relation obtenue au n° **273**,

$$(16) \qquad -2(\omega\omega'_1 - \omega'\omega_1) = -\frac{4\pi i}{k^2}.$$

439. L'intégrale elliptique de troisième espèce, telle qu'elle s'est présentée d'abord, est donnée par la formule (16) du n° **275**; nous la mettrons sous la forme

$$(17) \qquad V = \int_0^x \frac{\alpha\beta\, dx}{(x^2 - \alpha^2)y},$$

β étant la valeur qu'acquiert y lorsque la variable x va de l'origine O au point α par un chemin déterminé $O\alpha$, y ayant au point O la valeur initiale $+1$. Cette intégrale admet quatre points logarithmiques, savoir les deux points $(\alpha, \pm\beta)$ et les deux points $(-\alpha, \pm\beta)$. Quand la variable x tourne autour de chacun d'eux dans le sens positif, l'intégrale éprouve les accroissements $\pm\pi i$, $\mp\pi i$. Joignons les deux points géométriques α et $-\alpha$ par une ligne qui ne coupe aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques, et complétons le lacet qui enveloppe ces deux points par le chemin déterminé $O\alpha$.

Si U est l'intégrale de première espèce, et V une de troisième espèce, l'intégrale $\int U\,dV$, conservant une valeur finie quand x devient infinie, est nulle sur chacun des deux circuits. Le lacet qui enveloppe les deux points (α, β), $(-\alpha, \beta)$ entre dans l'un des circuits; le même lacet, considéré comme enveloppant les deux points $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta)$, entre dans l'autre circuit; ces deux lacets donnent d'ailleurs des termes égaux. En désignant par 2ε et ε' les périodes de V fournies, comme celles de U, par les deux cycles formés, l'un des deux lacets (a_0) et (a_2), l'autre des deux lacets (a_1) et (a_0), on a l'équation

$$-2(\omega\varepsilon' - \omega'\varepsilon) + 2\pi i \int_{(-\alpha, \beta)}^{(\alpha, \beta)} dU = 0.$$

Pour préciser, nous supposerons que la ligne déterminée $O\alpha$ passe entre les points a_1 et a_2, ce qui est toujours possible, quelle que soit la position du point α, et nous appellerons a la valeur de l'intégrale de première espèce, quand la variable x décrit la ligne $O\alpha$, avec la valeur initiale $y = 1$. Si l'on considère le cycle formé par la ligne qui joint les deux points α et $-\alpha$, la ligne $O\alpha$ et une ligne symétrique allant de l'origine au point $-\alpha$, on a

$$\int_0^\alpha dU + \int_\alpha^{-\alpha} dU + \int_{-\alpha}^0 dU = a_2 - a_3 = \omega',$$

d'où

$$\int_{-\alpha}^\alpha dU = 2\int_0^\alpha dU - \omega' = 2a - \omega';$$

et l'équation précédente devient

$$(18) \qquad \omega\varepsilon' - \omega'(\varepsilon - \pi i) = 2\pi a i.$$

Le même raisonnement s'applique au cas où U est l'intégrale de deuxième espèce, V étant toujours une intégrale de troisième espèce. L'intégrale $\int U\,dV$ conserve encore une valeur finie, quand x devient infinie, et l'on obtient l'équation

$$(19) \qquad \omega_1\varepsilon' - \omega_1'(\varepsilon - \pi i) = 2\pi i \zeta(a).$$

Des deux relations précédentes, on déduit

(20) $$\varepsilon = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega + \pi i, \quad \varepsilon' = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega' + \frac{2\pi a i}{\omega}.$$

440. Considérons maintenant deux intégrales elliptiques de troisième espèce

$$U = \int_0^x \frac{\alpha\beta\, dx}{(x^2 - \alpha^2)y}, \quad V = \int_0^x \frac{\alpha'\beta'\, dx}{(x^2 - \alpha'^2)y}.$$

Joignons les points α et $-\alpha$, α' et $-\alpha'$ par des lignes qui ne coupent pas les lacets relatifs aux points critiques algébriques et qui ne se coupent pas entre elles. Si l'on appelle $2\varepsilon_1$ et ε'_1 les périodes de la seconde intégrale, relatives aux deux cycles précédents, on a l'équation

$$-2(\varepsilon\varepsilon'_1 - \varepsilon'\varepsilon_1) + 2\pi i \int_{-\alpha'}^{\alpha'} dU - 2\pi i \int_{-\alpha}^{\alpha} dV = 0.$$

Supposons que le lacet (α) précède le lacet (α'); avec une disposition convenable de ces lacets, et en raisonnant comme précédemment, on obtient

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} dV = 2\int_0^{\alpha} dV - \varepsilon'_1 - \pi i, \quad \int_{-\alpha'}^{\alpha'} dU = 2\int_0^{\alpha'} dU - \varepsilon',$$

et l'équation devient

$$2\pi i \int_0^{\alpha'} dU - 2\pi i \int_0^{\alpha} dV = (\varepsilon - \pi i)\varepsilon'_1 - \varepsilon'(\varepsilon_1 - \pi i) + \pi^2,$$

ou, en vertu des relations (20),

(21) $$\int_0^{\alpha'} dU - \int_0^{\alpha} dV = k^2[a\zeta(a') - a'\zeta(a)] - \frac{\pi i}{2}.$$

L'intégrale (17), exprimée à l'aide de la variable z, est

(22) $$\varpi(z, a) = \int_0^z \frac{\lambda(a)\lambda'(a)\, dz}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)};$$

c'est celle qui est donnée par la formule (20) du n° 275; nous la dési-

gnons par la lettre ϖ, afin de la distinguer de l'intégrale $\Pi(z, a)$ considérée par Jacobi. L'équation (21) devient

$$(23)\qquad \varpi(a', a) - \varpi(a, a') = k^2[a\zeta(a') - a'\zeta(a)] - \frac{\pi i}{2}.$$

Elle effectue la permutation du paramètre et de l'argument.

On passe d'une forme à l'autre, en remarquant que l'on a identiquement

$$\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)x^2}{1 - k^2\lambda^2(a)x^2} = \frac{\lambda\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda'\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)}{x^2 - \lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)} - \frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)},$$

et, par suite,

$$(24)\qquad \int_0^x \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)x^2\,dx}{[1 - k^2\lambda^2(a)x^2]y} = \int_0^x \frac{\lambda\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda'\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)}{\left[x^2 - \lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\right]y}\,dx - \frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)}\int_0^x \frac{dx}{y},$$

ou

$$(25)\qquad \Pi(z, a) = \varpi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right) - z\frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)}.$$

L'équation (24) montre que les périodes $2\omega_2$ et ω'_2 de l'intégrale $\Pi(z, a)$, fournies par les deux cycles $(a_0) + (a_2)$, $(a_1) + (a_0)$ sont égales à celles de l'intégrale $\varpi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right)$, augmentées respectivement des quantités $-2\omega D_a \log\lambda(a)$, $-\omega' D_a \log\lambda(a)$; ce sont précisément celles qui sont données par les formules (23) du n° 275.

CHAPITRE III.

THÉORÈME D'ABEL.

441. Une courbe $\varphi(x,y)=0$ du degré n coupe la courbe $f(x,y)=0$ du degré m en mn points, que nous désignerons par (ξ_1,η_1), (ξ_2,η_2),.... Une autre courbe $\psi(x,y)=0$ du degré n coupe de même la courbe $f=0$ en mn points (ξ'_1,η'_1), (ξ'_2,η'_2),.... Joignons ces points deux à deux par des lignes $\xi_1\xi'_1$, $\xi_2\xi'_2$,... qui ne se coupent pas, c'est-à-dire telles qu'au point d'intersection des deux lignes géométriques figurant la variation de x, la valeur de y ne soit pas la même. A l'aide de chacune des lignes $\xi\xi'$, de deux petits cercles décrits autour des points ξ et ξ' et d'une ligne Og unissant l'origine O à cette ligne $\xi\xi'$, nous formerons un lacet enveloppant les deux points ξ et ξ'; nous aurons mn lacets de ce genre. Soit

$$U=\log\frac{\varphi}{\psi},\quad V=\int\frac{G\,dx}{[x_1,x_2]f'_y}.$$

Nous supposons d'une manière générale que les lignes analytiques qui forment les lacets $(\xi\xi')$, le lacet (x_1x_2), et ceux relatifs aux points critiques de la fonction algébrique y de x, ne se coupent pas. Sur chaque circuit, enveloppant tous ces lacets, l'intégrale $\int U\,dV$ étant nulle, on a, pour l'ensemble des m circuits, l'équation

$$(1)\qquad \Sigma\int U\,dV=-\Sigma\int V\,dU=0.$$

Quand la variable x décrit l'un des lacets $(\xi\xi')$, la fonction U, éprouvant aux points ξ et ξ' les accroissements $+2\pi i$ et $-2\pi i$, reprend à la fin du lacet la valeur qu'elle avait à l'entrée; de même, la fonction V sur le lacet (x_1x_2). Il en résulte que ces lacets n'ont pas d'influence

sur la partie de l'intégrale qui se rapporte aux lacets relatifs aux points critiques de la fonction algébrique; cette partie sera donc de la forme $\Sigma\omega\omega'$, ω et ω' étant des périodes des deux fonctions U et V (n° 435); mais, quand la variable x décrit un cycle, les fonctions entières φ et ψ reprenant leurs valeurs primitives, la fonction $\log\frac{\varphi}{\psi}$ éprouve une variation égale à $2m'\pi i$, m' étant un nombre entier; l'expression $\Sigma\omega\omega'$ se réduit ainsi à la forme $2\pi i\Sigma m'\omega'$.

Le lacet $(x_1 x_2)$, d'après ce que nous avons dit au n° 436, donne le terme $2\pi i\int_{x_1}^{x_1} d\log\frac{\varphi}{\psi}$. De même, d'après la seconde forme de l'équation, chaque lacet $(\xi\xi')$ donne un terme $2\pi i\int_{\xi}^{\xi'} d\mathrm{V}$. On obtient ainsi l'équation

$$(2) \qquad \sum\int_{\xi}^{\xi'} d\mathrm{V} + \int_{x_1}^{x_1} d\log\frac{\varphi}{\psi} + \sum m'\omega' = 0,$$

qui constitue le théorème d'Abel, dans son acception générale.

442. On peut associer les points ξ et ξ' deux à deux, de manière que tous les nombres entiers m' soient nuls. On sait, en effet, que, si l'on fait passer une courbe du degré n par un certain nombre de points pris à volonté sur la courbe $f = 0$ du degré m, les autres points d'intersection en résultent. Lorsque n est plus petit que m, le nombre n' des points que l'on peut prendre à volonté est égal à $\frac{n(n+3)}{2}$; la courbe du degré n est alors déterminée; mais, lorsque n est égal ou supérieur à m, ce nombre est égal à $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$; il est moindre que celui qui est nécessaire pour déterminer la courbe. A n' points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n'}$ d'intersection de la courbe $\varphi = 0$ avec la courbe $f = 0$, faisons correspondre n' points pris à volonté parmi les mn points d'intersection de la courbe $\psi = 0$ avec $f = 0$, désignons-les par $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, et joignons-les aux précédents par des lignes arbitraires $\xi_1\xi'_1$, $\xi_2\xi'_2, \ldots, \xi_{n'}\xi'_{n'}$, avec la restriction indiquée. Sur ces lignes prenons des points $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{n'}$ voisins respectivement des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n'}$; par ces n' points nous pourrons faire passer une courbe $\varphi'' = 0$ du degré n et différant très-peu de la courbe $\varphi = 0$;

cette courbe coupe la courbe $f = 0$ en $mn - n'$ autres points $\xi''_{n'+1}$, $\xi''_{n'+2}, \ldots, \xi''_{mn}$, voisins respectivement de $\xi_{n'+1}, \xi_{n'+2}, \ldots, \xi_{mn}$. Sur les mêmes lignes on prendra ensuite des points $\xi'''_1, \xi'''_2, \ldots, \xi'''_{n'}$ voisins respectivement de $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{n'}$, et l'on fera passer par ces points une courbe $\varphi''' = 0$ du degré n et différant très-peu de la courbe $\varphi'' = 0$. Cette courbe coupera $f = 0$ en d'autres points $\xi'''_{n'+1}, \xi'''_{n'+2}, \ldots, \xi'''_{mn}$, voisins respectivement de $\xi''_{n'+1}, \xi''_{n'+2}, \ldots, \xi''_{mn}$, et ainsi de suite; on passera de la sorte, par une déformation continue, de la courbe φ à la courbe ψ. La série des points $\xi_{n'+1}, \xi''_{n'+1}, \xi'''_{n'+1}, \ldots$ formera une ligne continue unissant le point $\xi_{n'+1}$ de la courbe φ à un certain point $\xi'_{n'+1}$ de la courbe ψ; de même la série des points $\xi_{n'+2}, \xi''_{n'+2}, \xi'''_{n'+2}, \ldots$ formera une ligne unissant le point $\xi_{n'+2}$ de la courbe φ à un certain point $\xi'_{n'+2}$ de la courbe ψ, et ainsi de suite. De cette manière, la corrélation des $mn - n'$ autres points ξ et ξ' est déterminée : elle résulte de celle adoptée pour les n' premiers points.

Lorsque $\psi = \varphi$, la fonction $\log \frac{\varphi}{\psi}$ reste constante sur chaque cycle, et par conséquent sa variation est nulle; les nombres m' sont nuls. Lorsque la fonction ψ diffère très-peu de φ, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ différant peu de l'unité, l'intégrale $\int d \log \frac{\varphi}{\psi}$ sur un cycle différera peu de la précédente, si elle en diffère; et, par conséquent, le nombre entier m' est encore nul. On pourra continuer de cette manière tant que les lignes $\xi\xi'$, en s'allongeant, ne rencontrent pas les lacets relatifs aux points critiques, ou le lacet $(x_1\, x_2)$. Avec ces restrictions, l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad \sum \int_{\xi}^{\xi'} dV + \int_{x_1}^{x_1} d \log \frac{\varphi}{\psi} = 0.$$

Le même raisonnement s'applique à l'intégrale abélienne de première espèce; le lacet $(x_1\, x_2)$ n'existant plus, l'équation se simplifie et devient

$$(4) \qquad \sum \int_{\xi}^{\xi'} dV = 0.$$

La somme des valeurs de l'intégrale relatives aux diverses lignes qui

joignent les points d'intersection des courbes f et φ aux points d'intersection des courbes f et ψ, de la façon indiquée, est nulle.

Dans ces deux derniers Chapitres, nous avons mis à profit l'ouvrage de MM. Clebsch et Gordan que nous avons déjà cité (n° **113**).

Addition des intégrales elliptiques.

443. La formule de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce est une conséquence de cette loi générale. La courbe $f = 0$ est ici

$$(5) \qquad y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2) = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4.$$

Les points d'intersection de cette courbe et de la parabole

$$(6) \qquad y = px^2 + qx + 1$$

sont donnés par l'équation du troisième degré

$$(7) \qquad (p^2 - k^2)x^3 + 2pqx^2 + (q^2 + 2p + 1 + k^2)x + 2q = 0,$$

abstraction faite de la racine $x = 0$. Appelons x_1, x_2, x_3 les trois racines de cette équation, et y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y données par l'équation (6). On peut déterminer les constantes p et q de manière que deux des racines x_1 et x_2 aient des valeurs données; la troisième x_3 sera alors fonction des deux premières. De l'équation (7) on déduit

$$(8) \qquad p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3},$$

d'où

$$(9) \qquad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{px_1x_2 - 1} = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1y_2 - x_2y_1} = -\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{1 - k^2x_1^2x_2^2}.$$

Supposons que la courbe ψ soit la parabole (6) et la courbe φ la parabole particulière $y = -\frac{1 + k^2}{2}x^2 + 1$, pour laquelle $x_1 = x_2 = 0$,

et, par suite, $x_3 = 0$. On a, d'après l'équation (4),

$$\int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV = 0,$$

ou

(10) $$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

La relation (9), sous sa dernière forme, donne la première des formules (1) du n° 318, savoir

(11) $$\lambda(z_1 + z_2) = \frac{\lambda(z_1)\lambda'(z_2) + \lambda(z_2)\lambda'(z_1)}{1 - k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}.$$

444. Si V est une intégrale elliptique de seconde espèce, on a approximativement, pour les valeurs très-grandes de x,

$$y = \pm k x^2, \quad \varphi = \frac{(1 \pm k)^2}{2} x^2, \quad \psi = (\pm k - p) x^2 - q x,$$

$$\log \frac{\varphi}{\psi} = C + \frac{q}{\pm k - p} \frac{1}{x}, \quad dV = \pm \frac{1}{k} dx;$$

les deux circuits donnent $2\pi i \frac{q}{k(k \mp p)}$, ensemble $2\pi i \frac{2q}{k^2 - p^2}$, ou, d'après l'équation (7), $2\pi i x_1 x_2 x_3$; le second membre de l'équation (4) est alors égal à $x_1 x_2 x_3$, et l'on a

(12) $$\int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV = x_1 x_2 x_3,$$

ou

(13) $$\zeta(z_1) + \zeta(z_2) + \zeta(z_3) = \lambda(z_1)\lambda(z_2)\lambda(z_3);$$

en vertu de la relation (10), c'est l'équation (24) du n° 324.

445. Considérons enfin le cas où V est une intégrale elliptique de troisième espèce, mise sous la forme (17), adoptée au n° 439. D'après l'hypothèse faite sur la position de la ligne $O\alpha$, le lacet qui unit le

joignent les points d'intersection de[illegible] premier circuit, et tersection des courbes f et ψ, [illegible]

Dans ces deux dernier[illegible] $\frac{\psi(\ldots\alpha, \beta)}{\psi(\alpha, \beta)}$, de MM. Clebsch et [illegible]

[illegible] L'autre lacet entre dans le second cir-

443. [illegible] espèc[illegible] ici [illegible]

$$\pi i \int_{(\alpha, -\beta)}^{(-\alpha, -\beta)} d \log \frac{\varphi}{\psi} = -\pi i \log \frac{\psi(-\alpha, -\beta)}{\psi(\alpha, -\beta)}.$$

L'équation (3) devient donc

$$(14) \qquad \int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV + \frac{1}{2} \log \frac{\psi(-\alpha, \beta)\psi(\alpha, -\beta)}{\psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta)} = 0.$$

Évaluons le dernier terme. On a

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta) &= (p\alpha^2 + 1)^2 - (\beta - q\alpha)^2 = 2q\alpha\beta + (2p - q^2 + 1 + k^2)\alpha^2 + (p^2 - k^2)\alpha^4 \\ &= 2q\alpha\left[\beta + \frac{p^2 - k^2}{2q}\alpha^3 + \left(\frac{q^2 + 2p + 1 + k^2}{2q} - q\right)\alpha\right] \\ &= 2q\alpha\left[\beta - \frac{\alpha^3}{x_1 x_2 x_3} - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + q\right)\alpha\right]. \end{aligned}$$

De la relation $y_3 = px_3^2 + qx_3 + 1$, dans laquelle on remplace p par sa valeur (8), on déduit

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + q = \frac{x_1 x_2 y_3 - x_3^2}{x_1 x_2 x_3};$$

il en résulte

$$\psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1 x_2 x_3}\left[\alpha^2 - x_3^2 + \frac{x_1 x_2}{\alpha}(\alpha y_3 - x_3\beta)\right].$$

On a de même

$$\psi(-\alpha, \beta)\psi(\alpha, -\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1 x_2 x_3}\left[\alpha^2 - x_3^2 + \frac{x_1 x_2}{\alpha}(\alpha y_3 + x_3\beta)\right],$$

et, par suite,

$$\frac{\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta)}{\psi(-\alpha,\beta)\psi(\alpha,-\beta)}=\frac{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3-x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}}{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3+x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}}=\frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a+z_3)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_3)}}.$$

On obtient ainsi la relation

$$(15)\qquad \varpi(z_1)+\varpi(z_2)+\varpi(z_3)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_1-z_2)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z)}{\lambda(a)\lambda(a+z_1+z_2)}},$$

d'où l'on déduit facilement l'équation (28) du n° 325.

FIN.

point (α, β) au point $(-\alpha, \beta)$ entre dans le premier circuit, et donne

$$\pi i \int_{(-\alpha, \beta)}^{(\alpha, \beta)} d \log \frac{\varphi}{\psi} = \pi i \log \frac{\psi(-\alpha, \beta)}{\psi(\alpha, \beta)},$$

puisque $\varphi(-\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$. L'autre lacet entre dans le second circuit, et donne de même

$$-\pi i \int_{(-\alpha, -\beta)}^{(\alpha, -\beta)} d \log \frac{\varphi}{\psi} = -\pi i \log \frac{\psi(-\alpha, -\beta)}{\psi(\alpha, -\beta)}.$$

L'équation (3) devient donc

$$(14) \qquad \int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV + \frac{1}{2} \log \frac{\psi(-\alpha, \beta)\psi(\alpha, -\beta)}{\psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta)} = 0.$$

Évaluons le dernier terme. On a

$$\begin{aligned}\psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta) &= (p\alpha^2 + 1)^2 - (\beta - q\alpha)^2 = 2q\alpha\beta + (2p - q^2 + 1 + k^2)\alpha^2 + (p^2 - k^2)\alpha^4 \\ &= 2q\alpha\left[\beta + \frac{p^2 - k^2}{2q}\alpha^3 + \left(\frac{q^2 + 2p + 1 + k^2}{2q} - q\right)\alpha\right] \\ &= 2q\alpha\left[\beta - \frac{\alpha^3}{x_1 x_2 x_3} - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + q\right)\alpha\right].\end{aligned}$$

De la relation $y_3 = p x_3^2 + q x_3 + 1$, dans laquelle on remplace p par sa valeur (8), on déduit

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + q = \frac{x_1 x_2 y_3 - x_3^2}{x_1 x_2 x_3};$$

il en résulte

$$\psi(\alpha, \beta)\psi(-\alpha, -\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1 x_2 x_3}\left[\alpha^2 - x_3^2 + \frac{x_1 x_2}{\alpha}(\alpha y_3 - x_3\beta)\right].$$

On a de même

$$\psi(-\alpha, \beta)\psi(\alpha, -\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1 x_2 x_3}\left[\alpha^2 - x_3^2 + \frac{x_1 x_2}{\alpha}(\alpha y_3 + x_3\beta)\right],$$

et, par suite,

$$\frac{\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta)}{\psi(-\alpha,\beta)\psi(\alpha,-\beta)}=\frac{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3-x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}}{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3+x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}}=\frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a+z_3)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_3)}}.$$

On obtient ainsi la relation

(15) $$\varpi(z_1)+\varpi(z_2)+\varpi(z_3)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_1-z_2)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z)}{\lambda(a)\lambda(a+z_1+z_2)}},$$

d'où l'on déduit facilement l'équation (28) du n° 325.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE III.

LES INTÉGRALES DÉFINIES.

LIVRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS.

LIVRE V.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

LIVRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE VII.

ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE VIII.

TRANSFORMATION.

LIVRE IX.

THÉORÈME D'ABEL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 17, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $u = z'^{n-m}\dfrac{A_m + A_{m-1}z' + \ldots + A_0 z'^m}{B_n + B_{n-1}z' + \ldots + B_0 z'^n}$,

lisez $u = z'^{n-m}\dfrac{A_0 + A_1 z' + \ldots + A_m z'^m}{B_0 + B_1 z' + \ldots + B_n z'^n}$.

Page 18, ligne 8 en descendant, *au lieu de* n° 10, *lisez* n° 12.

Page 41, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $(\nu_2 + \varepsilon_2)z^{\frac{1}{n}}$, *lisez* $(\nu_2 + \varepsilon_2)^{\frac{1}{n}}$.

Page 60, ligne 6, en descendant, *au lieu de* $i\sqrt{2}\, z_1^{\frac{n}{2}} z'^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $i\sqrt{2}\, z_1^{\frac{5}{2}} z'^{\frac{1}{2}}$.

Page 85, ligne 13, en remontant, *au lieu de* $f''(z)\dfrac{h}{1}$, *lisez* $f''(z)\dfrac{h}{2}$.

Page 103, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $+\sin ha \cos hb$, *lisez* $+\sin ha \sin hb$.

Page 110, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $+e^{-2\rho+2^2a'} + e^{-\rho+a'}$, *lisez* $+e^{2\rho+2^2a'} + e^{\rho+a}$.

Page 117, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $\dfrac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{\frac{\pi z i}{\omega}}\theta_1(z)$, *lisez* $\dfrac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}\theta_1(z)$.

Page 171, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $(b)^{\delta}$, *lisez* $(b)_{\gamma}^{\delta}$.

Page 176, ligne 4, en descendant, *au lieu de* supposons qu'on décrive, *lisez* quand on décrit.

Page 179, ligne 13, en remontant, *au lieu de* points ordinaires, *lisez* points ordinaires, le premier pour la fonction u', le second pour la fonction $v = u'z'^2$.

Page 268, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $+b'_1\omega_1$, *lisez* $+b'_1\omega'_1$.

Page 270, ligne 10, en remontant, *au lieu de* $-a_1 a''$, *lisez* $-a_1 a'$.

Page 279, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $+A_{n-1}$, *lisez* $+A_{n-1}P_0$.

Page 319, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $\vartheta(0) = \sqrt{\dfrac{g\omega'k'}{\pi}}$, *lisez* $\vartheta(0) = \sqrt{\dfrac{g\omega'k'}{\pi i}}$.

Page 353, ligne 10, en descendant, *au lieu de* points b et c, *lisez* points a et d.

Page 361, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\dfrac{\omega}{2} + m\omega + m'\omega'$, et les infinis $\dfrac{\omega + \omega'}{2} + m\omega + m'\omega'$,

lisez $\dfrac{\omega}{2} + 2m\omega + m'\omega'$, et les infinis $\dfrac{\omega + \omega'}{2} + 2m\omega + m'\omega'$.

Page 370, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\sqrt{K_1} = \dfrac{\sqrt{iK'}}{k}$, *lisez* $\sqrt{K_1} = \sqrt{\dfrac{iK'}{k}}$.

Page 374, ligne 5, en descendant, *au lieu de* les multiplicateurs, *lisez* le premier multiplicateur.

Page 395, ligne 3, en descendant, *au lieu de* f_1, *lisez* f_1^m.

Page 450, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\dfrac{\left(kk'^2\dfrac{d\Omega}{dk}\right)}{dk}$, *lisez* $\dfrac{d\left(kk'^2\dfrac{d\Omega}{dk}\right)}{dk}$.

Page 458, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $\lambda\left(\dfrac{\omega+\omega'}{k}\right) = \sqrt{\dfrac{k+ik'}{4}}$, *lisez* $\lambda\left(\dfrac{\omega+\omega'}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{k+ik'}{k}}$.

Page 467, ligne 9, en remontant, *au lieu de* n° 201, *lisez* n° 221.

Page 470, ligne 4, en descendant, *au lieu de* $+ 2kh' \frac{\partial \mathrm{A1}}{}$, *lisez* $+ 2kk'^2 \frac{\partial \mathrm{A1}}{\partial k}$.

Page 575, ligne 9, en descendant, *au lieu de* $\sqrt{\frac{g_1^2 k' k_1}{nkk'}}$, *lisez* $\sqrt{\frac{g_1^2 k_1 k_1}{nkk'}}$,

Page 581, ligne 11, en remontant, *au lieu de* $\lambda \left[z + (n-1)\frac{2\omega}{n} + \frac{\omega}{n}\right]$, *lisez* $\left[z + (n-1)\frac{2\omega}{n} + \frac{\omega'}{n}\right]$.

Pages 590, 591, 592, *au lieu de* $\lambda'(z)$ *et de* $\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, *lisez partout* $\frac{1}{g}\lambda'(z)$, $\frac{1}{g_1}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$.

Page 631, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $(-1)^{\alpha}\, 2^{\frac{n-1}{2}} u^n$, *lisez* $(-1)^{\alpha}\, 2^{-\frac{n-1}{2}} u^n$.

Page 631, ligne 8, en remontant, *au lieu de* l'équation (10), *lisez* l'équation (9).

Page 631, ligne 3, en remontant, *au lieu de* la série (8), *lisez* la série qui donne ω.

Page 650, ligne 1, en remontant, *au lieu de* v_2, *lisez* v^2.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
256 Quai des Augustins, 55.



